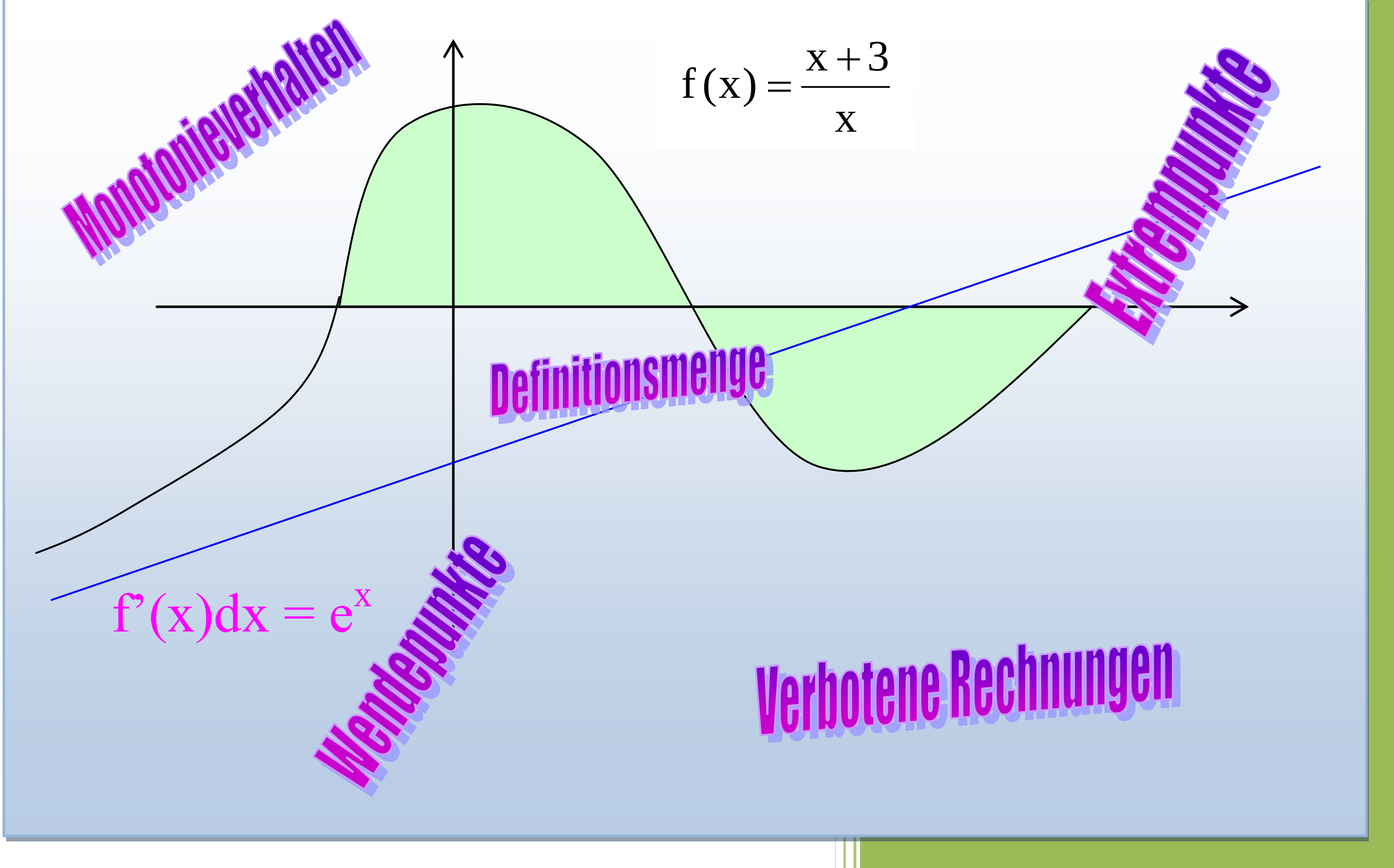
Skripten für die Oberstufe

Kurvendiskussion



www.drothler.net

Um Funktionsgraphen möglichst genau zeichnen zu können, werden verschiedene Eigenschaften von Funktionen untersucht. Dabei benötigt man vor allem den Funktionsterm und die Terme der 1. und 2. Ableitung (selten den der 3. Ableitung)

Untersuchung von f(x)

1. Die Definitionsmenge *D*

Ist nichts weiter vorgegeben, so ist die Definitionsmenge stets $\mathbb{R}$. Allerdings gibt es drei Ausnahmen: B W L

① **Brüche** $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$

Der Ansatz **n(x) = 0** (Nenner Null setzen) liefert die *Definitionslücken* der Funktion.

② **Wurzeln** $f(x) = \sqrt{r(x)}$

Der Ansatz $\mathbf{r(x) \geq 0}$ liefert die *Definitionsmenge* der Funktion

③ **Logarithmen** $f(x) = \log_b [a(x)]$

Der Ansatz $\mathbf{a(x) > 0}$ liefert die *Definitionsmenge* der Funktion

Beispiele:

➀ $f(x) = \frac{3-x}{x^3-5x^2+6x}$

Ansatz: $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0$

$\mathbf{x_1 = 0;} \quad x_{2/3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \mathbf{x_2 = 2; x_3 = 3}$

(oder mit Vieta: $x(x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow \mathbf{x_2 = 2; x_3 = 3}$)

$\Rightarrow \boldsymbol{D = \mathbb{R} \backslash \{0;2;3\}}$

➁ $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$

Ansatz: $x^2 - 1 > 0$

$(x-1)(x+1) > 0$

$(x - 1 > 0 \wedge x + 1 > 0) \vee (x - 1 < 0 \wedge x + 1 < 0)$

$(x > 1 \quad \wedge \quad x > -1) \quad \vee (x < 1 \quad \wedge x < -1)$

$D_1 =]1; \infty[\qquad\qquad D_2 =]-\infty; -1[$

$\Rightarrow \boldsymbol{D = \mathbb{R} \backslash [-1;1]}$

2. Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

① Schnittpunkte mit der x-Achse

Der Ansatz f(x) = 0 liefert die Nullstellen x_1, x_2, ...
Die Schnittpunkte haben stets die y-Koordinate Null!
Also: $N_1(x_1/0)$, $N_2(x_2/0)$,...

② Schnittpunkt mit der y-Achse

Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die x-Koordinate 0, falls $0 \in D$
Die y-Koordinate erhält man, indem man f(0) berechnet.
Also: $S_y(0/f(0))$

Beispiele:

Berechne die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen

① $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $D = [-2; 2]$

<u>SP mit x-Achse:</u>

$f(x) = 0$
$\sqrt{4-x^2} = 0$
$(2 + x)(2 - x) = 0$
$x_1 = -2;\ x_2 = 2$
$N_1(-2/0)$; $N_2(2/0)$

<u>SP mit y-Achse</u>

$f(0) = \sqrt{4-0^2} = \sqrt{4} = 2$
$S_y(0/2)$

② $f(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{x^3-5x^2+6x}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2; 3\}$ (s. Beispiel ① von oben!)

<u>SP mit x-Achse:</u>

$f(x) = 0$
$x(x - 1)^2 = 0$
$(x_1 = 0 \notin D)$
$x_2 = 1$ (doppelte Nullstelle)
N(1/0) (ist Berührpunkt)

<u>SP mit y-Achse</u>

$x = 0 \notin D$
Kein Schnittpunkt mit der y-Achse vorhanden

Vorzeichenwechsel (VZW)

Stetige Funktionen können ihr Vorzeichen nur an den Definitionslücken und Nullstellen wechseln.

Merke:

Sobald man einen x-Wert erhält oder für x einen Wert einsetzen will, muss man überprüfen, ob dieser Wert auch in der Definitionsmenge enthalten ist.

3. Die Symmetrie zum Koordinatensystem

Setzt man für x in den Funktionsterm (–x) ein, so kann man eine Aussage über das Symmetrieverhalten des Graphen machen:

> Gilt **f(–x) = f(x)**, dann ist der Graph *achsensymmetrisch zur y-Achse*.
>
> Gilt **f(–x) = –f (x)**, dann ist der Graph *punktsymmetrisch zum Ursprung*.

Beispiele: Untersuche das Symmetrieverhalten der Graphen folgender Funktionen zum Koordinatensystem:

① $f(x) = \sqrt{4-x^2} + 4x^4 \quad D = [-2; 2]$

$f(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} + 4(-x)^4 = \sqrt{4-x^2} + 4x^4 = f(x)$

Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

② $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3-x} \quad D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 0; 1\}$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2-2}{(-x)^3-(-x)} = \dfrac{x^2-2}{-x^3+x} = \dfrac{x^2-2}{-(x^3-x)} = -\dfrac{x^2-2}{x^3-x} = -f(x)$

Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

③ $f(x) = x^2 - x$

$f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x = -(-x^2 - x)$

Keine Symmetrie zum Koordinatensystem feststellbar.

4. Grenzwerte und Asymptoten

Um einfache Grenzwerte zu bestimmen, sind folgende **verbotene Rechnungen** ganz hilfreich:

$\dfrac{a}{\infty} = 0 \ (a > 0)$	$e^{+\infty} = \infty$	$\ln(+\infty) = +\infty$
$\dfrac{a}{0^+} = +\infty \ (a > 0)$	$e^{-\infty} = 0^+$	$\ln(0^+) = -\infty$
$\dfrac{a}{0^-} = -\infty \ (a > 0)$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\infty + \infty = \infty$

Bei den verbotenen Termen $\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}$ und $0 \cdot \infty$ kann man die Grenzwerte mit dem Kriterium „Schwache/Starke Funktion“ bestimmen, während es für $\infty - \infty$ keine Möglichkeit gibt.

Stark	Exponentialfunktion (e^{x-2} | $34 - e^{x-2}$)	Die schwächere Funktion wird in der
	Polynom (x^2+3 | $2x^7 - 3x + 5$)	verbotenen Rechnung durch eine Zahl
Schwach	Logarithmus ($\ln x$ | $2 - \ln(x+3)$)	(mit demselben VZ) ersetzt.

Beispiele:

① $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{3(x-3)(x+2)}{(x-1)} = -\infty$ | ② $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{3(x-3)(x+2)}{(x-1)} = +\infty$

③ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 3$ | ④ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \quad \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{a}{\infty} = 0$ x im Nenner ist stärker

⑤ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x \ln x} = -\infty \quad \dfrac{1}{0\cdot(-\infty)} = \dfrac{1}{0\cdot(-a)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ x im Nenner ist ist stärker als ln

Asymptoten

- Läuft x nach $\pm\infty$ und die Funktionswerte gegen eine Zahl a, also
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$,
  dann liegt eine *horizontale Asymptote* vor mit der Gleichung
  y = a

- Läuft x gegen eine Zahl b und die Funktionswerte gegen $\pm\infty$, also
  $\lim\limits_{x\to b\pm 0} f(x) = \pm\infty$,
  dann liegt eine *vertikale Asymptote* vor mit der Gleichung
  x = b

- Läuft x gegen eine Zahl b und die Funktionswerte gegen eine Zahl a, also
  $\lim\limits_{x\to b\pm 0} f(x) = a$,
  dann liegt eine *stetig behebbare Definitionslücke* vor. Das „Loch“ im Graphen hat die Koordinaten
  L(b/a)

Beispiel:
Untersuche das Verhalten von f, wenn x an die Grenzen des Definitionsbereichs strebt und gib die Gleichungen sämtlicher Asymptoten an

$$f(x) = \frac{4x-1}{2x+1};\ D = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x-1}{2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow \textbf{horizontale Asymptote: y = 2}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}\frac{4x-1}{2x+1} = -\infty;\quad \lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{4x-1}{2x+1} = +\infty$$

$$\Rightarrow \textbf{vertikale Asymptote: x = } -\frac{1}{2}$$

5. y-Koordinaten

Um die y-Koordinate eines beliebigen Punktes auf dem Graphen einer Funktion zu bestimmen, muss man die gegebene (oder berechnete) x-Koordinate in den Funktionsterm f(x) einsetzen!

Untersuchung von f ′ (x)

6. Tangente

$f'(x_o)$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $P(x_o/f(x_o))$ an.
Gleichung dieser Tangente: $\mathbf{y = f'(x_o)\cdot(x - x_o) + f(x_o)}$.

Die x-Koordinate von Punkten mit **waagrechter Tangente** erhält man über den Ansatz
$f'(x) = 0$

Für den Neigungswinkel α der Tangente an den Graphen an der Stelle xo gilt:
$\mathbf{\tan\alpha = f'(x_o)}$

Beispiel:
Bestimme die Gleichung und den Neigungswinkel der Tangente t an den Graphen der Funktion $f: x \to x^2\cdot\cos(3x)$ an der Stelle $x_o = \frac{\pi}{3}$.

$f'(x) = 2x\cdot\cos(3x) + x^2\cdot[-\sin(3x)\cdot 3]$ (Produktregel, Kettenregel)
$f'(x) = 2x\cdot\cos(3x) - 3x^2\cdot\sin(3x)$

<u>Gleichung der Tangente:</u>

$x_o = \frac{\pi}{3}$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) - 3\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\cos(\pi) - 3\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot\sin(\pi) = \frac{2\pi}{3}\cdot 1 + 0 =$$
$$= \frac{2\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}\cdot\cos(\pi) = \frac{\pi^2}{9}$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{2\pi}{3}\cdot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi^2}{9}$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{2\pi}{3}\cdot x - \frac{2\pi^2}{9} + \frac{\pi^2}{9}$$

$$\Rightarrow \mathbf{t: y = \frac{2\pi}{3}\cdot x - \frac{\pi^2}{9}}$$

<u>Neigungswinkel α der Tangente:</u>

$\tan\alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \mathbf{\alpha = 64{,}477°}$ (TR)

7. Monotonieverhalten und Extrema

Zur Bestimmung des Monotonieverhaltens und der Extrema einer Funktion geht man folgende Schritte:

① Bestimme die erste Ableitung $f'(x)$.

② Bestimme mit dem Ansatz $f'(x) = 0$ die Stellen mit waagrechter Tangente und berechne die zugehörigen y-Koordinaten.

③ Führe damit dann (falls nötig) eine Faktorzerlegung durch. Bei Brüchen: Auch den Nenner in Faktoren zerlegen!

④ Untersuche nun die Vorzeichen der 1. Ableitung. Hilfreich dafür ist oft eine Vorzeichentabelle.

⑤ Gib nun nach folgender Regel die Monotoniebereiche an:

Ist f stetig in [a; b], so gilt:

- $f'(x) > 0$ für $x \in]a; b[$ $\Rightarrow$ f ist streng monoton zunehmend für $x \in [a; b]$
  (bzw. G_f ist streng monoton steigend für $x \in [a; b]$)
- $f'(x) < 0$ für $x \in]a; b[$ $\Rightarrow$ f ist streng monoton abnehmend für $x \in [a; b]$
  (bzw. G_f ist streng monoton fallend für $x \in [a; b]$)

⑥ Gib nun Lage und Art der Extrema (Extrempunkte) an: Bei VZW von f' von + nach – liegt ein lokales Maximum (Hochpunkt) vor, bei VZW von – nach + liegt ein lokales Minimum vor (Tiefpunkt).

Beispiel:
Bestimme das Monotonieverhalten von f und gib Lage und Art der Extrempunkte an.
$f(x) = -x^3 + 12x^2 - 45x + 2$

① $f'(x) = -3x^2 + 24x - 45$

② $f'(x) = 0$
$-3x^2 + 24x - 45 = 0$

<u>1. Formel:</u>

$$x_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot (-3) \cdot (-45)}}{-6} = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{-6}$$

$x_1 = 5$; $y_1 = -5^3 + 12 \cdot 5^2 - 45 \cdot 5 + 2 = -48$;

$x_2 = 3$; $y_2 = -3^3 + 12 \cdot 3^2 - 45 \cdot 3 + 2 = -52$;

③ $\Rightarrow f'(x) = -3(x - 5)(x - 3)$;

<u>2. Vieta:</u>

③ $f'(x) = -3x^2 - 24x + 45 =$
$= -3(x^2 - 8x + 15) =$
$= -3(x - 5)(x - 3)$;

② $x_1 = 5$; $y_1 = -48$;
$x_2 = 3$; $y_2 = -52$;

④

		3	5
-3	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
		MIN	MAX

⑤ f ist streng monoton abnehmend für $x \in \,]-\infty; 3]$
f ist streng monoton zunehmend für $x \in [3; 5]$
f ist streng monoton abnehmend für $x \in [5; \infty[$

⑥ Tiefpunkt: T(3/-52)
Hochpunkt: H(5/-48)

Untersuchung von f″ (x)

8. Krümmungsverhalten und Wendepunkte

① Bestimme die zweite Ableitung f′′(x).

② Bestimme mit dem Ansatz f′′ (x) = 0 die Nullstellen der 2. Ableitung und berechne die zugehörigen y-Koordinaten.

③ Führe damit dann (falls nötig) eine Faktorzerlegung durch. Bei Brüchen: Auch den Nenner in Faktoren zerlegen!

④ Untersuche nun die Vorzeichen der 2. Ableitung. Hilfreich dafür ist oft eine Vorzeichentabelle.

⑤ Gib nun nach folgender Regel die Krümmungsbereiche an:

Ist f stetig in [a; b], so gilt:
- f′′ (x) > 0 für x ∈]a; b[⇒ G_f ist linksgekrümmt für x ∈ [a; b]
- f′′(x) < 0 für x ∈]a; b[⇒ G_f ist rechtsgekrümmt für x ∈ [a; b]

⑥ Gib nun die Koordinaten der Wendepunkte an: Stellen, an denen die 2. Ableitung einen VZW besitzt, sind die zugehörigen x-Koordinaten..

Beispiel:

Siehe „7. Monotonieverhalten“.

Alternative zur Bestimmung der Wendepunkte:

① Bestimme die zweite Ableitung f′′(x) und die 3. Ableitung f’’’(x).

② Bestimme mit dem Ansatz f′′ (x) = 0 die Nullstellen der 2. Ableitung und berechne die zugehörigen y-Koordinaten.

③ Setze die ermittelten x-Werte in f’’’(x) ein. Ist das Ergebnis nicht Null, so liegt ein Wendepunkt vor. Erhält man Null, so muss nach obigem Verfahren vorgegangen werden.

9. Wendetangente

Die Tangente an den Graphen im Wendepunkt heißt *Wendetangente*..

Ein Wendepunkt E(x_o/y_o) mit horizontaler Tangente heißt *Terrassenpunkt*. Hier gilt:

- f‘(x_o) = 0 und
- f“(x_o) = 0 und
- f“ besitzt einen VZW an der Stelle x_o (bzw. die 3. Ableitung ist hier nicht Null)

Beispiel:

Siehe „6. Tangente“
Hier ist x_o der x-Wert des Wendepunkts, f(x_o) der zugehörige y-Wert.

10. Art der Extrema

Alternativer Weg zur Bestimmung der Art der Extrema:

① Bestimme die erste Ableitung $f'(x)$.

② Bestimme die zweite Ableitung $f''(x)$.

③ Bestimme mit dem Ansatz $f'(x) = 0$ die Stellen x_1, x_2,... mit waagrechter Tangente und und berechne die zugehörigen y-Koordinaten.

④ Setze die x-Werte nacheinander in die 2. Ableitung ein. Gilt hierbei
- $f''(x_i) > 0 \Rightarrow$ an der Stelle x_i liegt ein Minimum vor
- $f''(x_i) < 0 \Rightarrow$ an der Stelle x_i liegt ein Maximum vor
- $f''(x_i) = 0$ keine direkte Aussage möglich .

⑤ Gib nun die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte an.

Beispiel:

Bestimme Lage und Art der Extrema für den Graphen der Funktion f mit
$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$

① $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$.

② $f''(x) = 12x^2 - 48x + 36$.

③ $f'(x) = 0$

$4x^3 - 24x^2 + 36x = 0$

$x(4x^2 - 24x + 36) = 0$

$x(2x - 6)^2 = 0$

$x_1 = 0;\; y_1 = f(0) = 0$

$x_1 = 3 \Rightarrow y_2 = f(3) = 27$

④⑤ $f''(0) = 36 > 0$ $\Rightarrow$ **Tiefpunkt T(0/0)**
$f''(3) = 0$

Test, ob ein Terrassenpunkt vorliegt:

<u>Ohne f''' (x):</u> $f''(x) = 12\,(x^2 - 4x + 3) = 4(x - 3)(x - 1)$
An der Stelle $x_o = 3$ liegt ein VZW vor.
$\Rightarrow$ **Terrassenpunkt E(3/27)**

<u>oder mit f''' (x)</u>: $f'''(x) = 24x - 48$
$f'''(3) = 24 \cdot 3 - 48 = 24 \neq 0$
$\Rightarrow$ **Terrassenpunkt E(3/27)**

Arbeitsblatt Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion f: $x \rightarrow 1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Der zugehörige Graph heißt G_f.

a) Bestimme D_f und berechne die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

b) Untersuche das Verhalten von G_f, wenn x an die Ränder von D_f strebt und gib die Gleichungen sämtlicher Asymptoten an.

c) Ermittle das Monotonieverhalten von G_f und gib Lage und Art vorhandener Extrempunkte an.

d) Untersuche das Krümmungsverhalten von G_f, bestimme die Koordinaten des Wendepunktes und stelle die Gleichung der Wendetangenten auf.

e) Berechne die Funktionswerte an den Stellen –5; –2; –1; $\frac{1}{4}$; 3 und 7. Zeichne unter Verwendung bisheriger Ergebnisse den Graphen G_f und die Wendetangente im Bereich $-7 \le x \le 7$ in ein Koordinatensystem (Einheit: 1cm).

f) Bestimme den Term G(x) einer beliebigen Stammfunktion der Funktion g: $x \mapsto 1-\frac{1}{x^2}$

g) Bestimme die Nullstellen von g.

h) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von g, von der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen x = 0,5 und x = 3 eingeschlossen wird.

Arbeitsblatt Kurvenscharen

1. Aufgabe

Berechne jeweils die Ableitung der Schar in Abhängigkeit vom Scharparameter und bestimme dann $f_1(x)$; $f'_1(x)$; $f_{-2}(x)$ und $f'_{-2}(x)$

a) $f_k(x)=\frac{x^2-2k}{x+3k}$; b) $f_a(x)=\frac{ax^2}{ax+2}$; c) $f_c(x)=\ln\left(\frac{x-c}{x+c}\right)$

2. Aufgabe

Bestimme die Definitionsmenge, berechne Nullstellen und ihre Anzahl in Abhängigkeit vom Scharparameter und bilde dann die erste Ableitung der Schar:

a) $f_k(x)=\frac{x^2-k}{x+3}$; b) $f_k(x)=\frac{x^2-k}{x-2}$; c) $f_c(x)=\frac{x^2-c}{(x+1)(x-2)}$

d) $f_k(x)=\frac{x^2+6x+k}{x+3}$; e) $f_a(x)=\frac{x^2-4x+a}{x-2}$; f) $f_k(x)=\frac{x^2-2kx+k^2}{x^2-4}$

g) $f_k(x)=e^{kx}$ - e; h) $f_a(x)=\ln\left(\frac{x+a}{x-2}\right)$; i) $f_b(x)=\ln\left(\frac{x-b}{x+1}\right)$