§22. Exponentielles Wachstum

1. Begriff

- Wachstumsvorgänge, bei denen sich eine Größe in bestimmten Zeitabschnitten immer um denselben Wert verändert, sind linear und können mit Hilfe einer linearen Funktion f mit $f(t) = at + b$ beschrieben werden, wobei t die Variable und a sowie b Konstanten sind.
- Wachstumsvorgänge, bei denen sich eine Größe in bestimmten Zeitabschnitten immer um denselben Faktor verändert, sind exponentiell und können mit Hilfe einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$ beschrieben werden, wobei t die Variable und k sowie a Konstanten sind.

Beispiele:

„Jeden Tag 2€ mehr" lineares Wachstum

„Steigerung von 5% jährlich" exponentielles Wachstum

2. Ermittlung der Konstanten

Beispiele:

Die Anzahl der Bakterien einer Bakterienkultur nimmt

a) stündlich um 30% zu

b) verdreifacht sich alle 3 Stunden

c) täglich um 5% ab.

Stelle einen Funktionsterm f(t) auf, der dieses Wachstum beschreibt, wenn die Kultur zum Zeitpunkt t = 0 aus 10 000 Bakterien besteht.

① Anfangswert bestimmen:

Der Anfangswert, also der Wert zum Zeitpunkt t = 0, ist die Konstante a. Hier: a = 10 000

② Wachstumsfaktor p ermitteln:

a) $p = 1 + 30\% = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$

b) $p = 3$

c) $p = 1 - 5\% = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

Das Beispiel b) könnte durch den Term $f(t) = 10\,000 \cdot 2^t$ beschrieben werden, jedoch können wir diese Funktion nicht ableiten, deswegen muss dieser Term zu $10\,000 \cdot e^{kt}$ verwandelt werden:

$10\,000 \cdot e^{kt} = 10\,000 \cdot 2^t$

$e^{kt} = 2^t \mid \ln$

$kt = t \cdot \ln 2$

$t(k - \ln 2) = 0$ gilt für $t = 0$ oder $k = \ln 2$

damit ist die Konstante $k = \ln p$

③ Funktionsterm aufschreiben und die Bedeutung der Variablen angeben:

a) $f(t) = 10000 \cdot e^{t \cdot \ln 1{,}3}$ (t in Stunden)

b) $f(t) = 10000 \cdot e^{t \cdot \ln 3}$ (t in 3 Stunden)

c) $f(t) = 10000 \cdot e^{t \cdot \ln 0{,}95}$ (t in Tagen)

Ein Wachstumsprozess, bei dem der Bestand in einem bestimmten Zeitintervall um einen bestimmten Faktor zunimmt/abnimmt kann durch die Exponentialfunktion
f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$
beschrieben werden.
Dabei ist a der Anfangswert, also der Bestand zum Zeitpunkt t = 0, k = lnp und p der Wachstumsfaktor.
Es gilt bei Zunahme (Bsp. a) und b)): k > 0 und bei Abnahme (Bsp. c)): k < 0.

3. Halbwertszeit/Verdopplungszeit

Den Zeitpunkt T_H bzw. T_D, zu dem sich der Bestand halbiert bzw. verdoppelt hat, nennt man *Halbwertszeit* bzw. *Verdopplungszeit*

Ermittlung:

Es gilt:	$f(T_H) = 0{,}5 \cdot f(0)$	bzw.	$f(T_D) = 2 \cdot f(0)$
Also:	$a \cdot e^{k \cdot T_H} = 0{,}5\, a \cdot e^{k \cdot 0}$	bzw.	$a \cdot e^{k \cdot T_D} = 2\, a \cdot e^{k \cdot 0}$
	$e^{k \cdot T_H} = 0{,}5$	bzw.	$e^{k \cdot T_D} = 2$
	$k \cdot T_H = \ln 0{,}5$	bzw.	$k \cdot T_D = \ln 2$

Damit: $T_H = \frac{\ln 0{,}5}{k} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln p}$ bzw. $T_D = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{\ln p}$

Beispiele:

a) $T_D = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}3} \approx 2{,}64$ Also beträgt die Verdopplungszeit 2,64 Stunden.

b) $T_D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63$ Also beträgt die Verdopplungszeit 0,63·3h = 1,89 h = 1h 54 min

c) $T_H = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95} \approx 13{,}51$ Also beträgt die Halbwertszeit 13,51 Tage

TIPP: Viele Aufgaben lassen sich am besten dadurch lösen, dass man einen Ansatz wie oben macht.

Beispiel

Das radioaktive Isotop Jod131 besitzt eine Halbwertszeit von 8,3 Jahren. Nach welcher Zeit sind 10% der Kerne zerfallen?

Lösung:

Aufstellen des Funktionsterms (wie unter 2.)

- ► a = 100% = 1
- ► k ermitteln mit der Formel für die Halbwertszeit $T_H = \frac{\ln 0{,}5}{k} \Rightarrow k = \frac{\ln 0{,}5}{T_H} \Rightarrow k = \frac{\ln 0{,}5}{8{,}3}$
- ► $f(t) = e^{\frac{\ln 0{,}5}{8{,}3} \cdot t}$

Ansatz: $f(t) = 0{,}9 \cdot f(0)$ OBACHT: „10% zerfallen“ heißt: 90% vorhanden

$$e^{\frac{\ln 0{,}5}{8{,}3} \cdot t} = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln 0{,}5}{8{,}3} t = \ln 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad t = 8{,}3 \frac{\ln 0{,}9}{\ln 0{,}5} \approx 1{,}26$$

Antwort: Nach 1,26 Jahren sind 10% zerfallen.

4. Momentane Wachstumsrate

Der Wert der Ableitung $f'(t_o)$ gibt wieder die *momentane Wachstumsrate* zum Zeitpunkt t_o an. (vgl. §03 | 2.)

Beispiel: *Momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt 4 h für Bsp.b)*

$t_o = \frac{4}{3}$; $f(t) = 10000 \cdot e^{t \cdot \ln 3}$ $\quad f'(t) = 10000 \cdot e^{t \cdot \ln 3} \cdot \ln 3$

$f'\left(\frac{4}{3}\right) = 10000 \ln 3 \cdot e^{\frac{4}{3} \ln 3} \approx 47534$; Wachstumsrate: 47534 Bakterien pro 3h bzw. 15844 pro h

