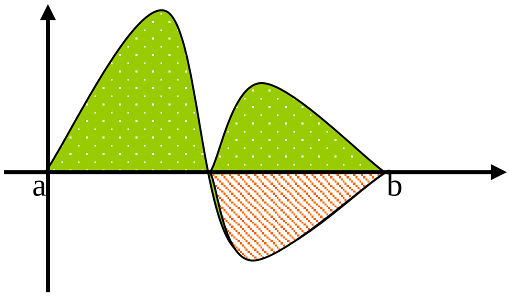
§21. Anwendungen der Integralrechnung

1. Flächenberechnung

Um den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse zu berechnen, muss das Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ berechnet werden.



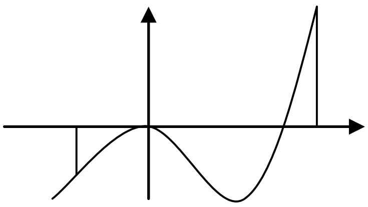
Einfacher: „Von Nullstelle zu Nullstelle integrieren“:

① Nullstellen im Intervall [a; b] berechnen ($x_1, x_2, \ldots, x_n$)

② Integration: $A = \left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,dx\right|$

<u>Beispiel:</u>
Bestimme den Inhalt A der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2$, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = 1$ eingeschlossen wird.

<u>Lösung:</u>



① $f(x) = 0$

$2x^3 - 4x^2 = 0$

$x^2(2x - 4) = 0$

$x_1 = 0$

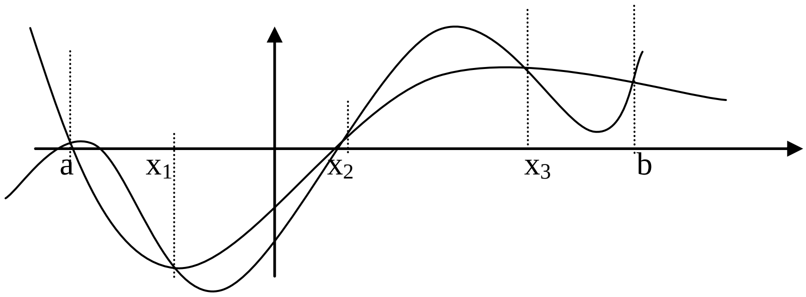
($x_2 = 2$ nicht im Intervall)

② $$A = \left|\int_{-2}^{0} (2x^3 - 4x^2)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (2x^3 - 4x^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3}\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right| =$$

$$= \left|0 - \left(\frac{(-2)^4}{2} - \frac{4(-2)^3}{3}\right)\right| + \left|\left(\frac{1^4}{2} - \frac{4\cdot 1^3}{3}\right) - 0\right| = \left|-2\frac{2}{3}\right| + \left|-\frac{5}{6}\right| = 3{,}5$$

2. Fläche zwischen 2 Funktionsgraphen

Um die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g zu bestimmen, muss man den Betrag der Differenz der beiden Funktionen integrieren.



Also:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = \left|\int_a^{x_1} [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx\right|$$

Beispiel:
Bestimme das von den Graphen der Funktionen
$f(x) = x^2 + 3x + \sin x$ und $g(x) = -x^2 - 2x + \sin x$
eingeschlossene Flächenstück..

Lösung:

① Bestimme die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$ (evtl. größere Werte minus kleinere)

$d(x) = -x^2 - 2x + \sin x - (x^2 + 3x + \sin x) = -2x^2 - 5x$

② Bestimme die Schnittstellen der Graphen (Nullstellen von d)

$d(x) = 0$
$-2x^2 - 5x = 0$
$x(-2x - 5) = 0$
$x_1 = -2{,}5 \qquad x_2 = 0$

③ Bestimme die Fläche durch Integration der Differenzfunktion

$$A = \int_{-2,5}^{0} (-2x^2 - 5x)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_{-2,5}^{0} = 0 - \left[-\frac{2}{3}(-2{,}5)^3 - \frac{5}{2}(-2{,}5)^2\right] = 5\frac{5}{24}$$

3. Lokale Änderungsrate und Gesamtänderung

Ist der Verlauf der lokalen/momentanen Änderungsrate einer Größe gegeben, so kann man die Maßzahl der Gesamtänderung der Größe in einem Intervall als Maßzahl des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse deuten und so durch Integration ermitteln.

Beispiele

f beschreibt	$\int_a^b f(x)dx$ beschreibt
momentane Verdunstungsrate von Wasser (z.B. in ml/h – Milliliter pro Stunde)	die im Zeitintervall [a;b] verdunstete Wassermenge (z.B. in ml)
Besucherrate am Einlass zu einem Konzert (z.B. in 1/min, d.h. Besucher pro min)	die im Zeitintervall [a;b] eingelassenen Besucher
Geschwindigkeit (momentane Änderungsrate des Wegs) (z.B. in m/s)	den im Zeitintervall [a;b] zurückgelegten Weg (z.B. in m)
Kraft, die längs eines Weges wirkt (z.B. in N)	die auf dem Wegintervall [a;b] verrichtete Arbeit (z.B. in Nm = J)

4. Uneigentliche Integrale

Entsteht bei der Integration ein ins Unendliche reichender Flächeninhalt (d.h. eine der Integrationsgrenzen strebt an den Rand des Definitionsbereichs), so berechnet man diesen über einen Grenzwert und nennt den Grenzwert *uneigentliches Integral*.

Beispiele für uneigentliche Integrale:

$\lim\limits_{z \to 0} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, D =]0; ∞[$\qquad \lim\limits_{a \to \infty} \int_3^a (2 - \frac{\ln(x-1)}{x})dx$, D =]1; ∞[