

§20. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung HDI

1. Integralfunktion

Definition

$f: t \mapsto f(t)$ sei eine in D_f definierte Funktion. Dann heißt die Funktion

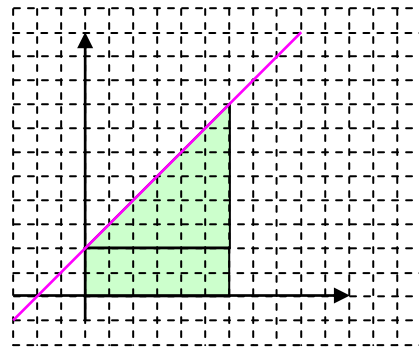
$$I_a: x \mapsto I_a(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ mit } a \in D_f$$

*Integralfunktion von f zur unteren Grenze a . Die Funktion f heißt *Integrandenfunktion*.*

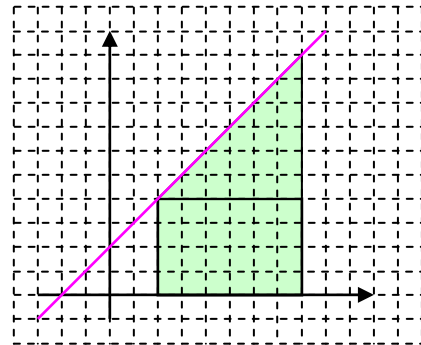
Beispiele:

Verschiedene Integralfunktionen für $f: t \rightarrow t + 1$

$$I_0(x) = \int_0^x (t+1) dt = 1 \cdot x + \frac{1}{2} x \cdot x = \frac{1}{2} x^2 + x$$



$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_1^x (t+1) dt = 2 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} (x-1) \cdot (x-1) = \\ &= 2x - 2 + \frac{1}{2} (x^2 - 2x + 1) = \\ &= 2x - 2 + \frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + x - 1 \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Satz:

Jede Integralfunktion besitzt mindestens eine Nullstelle, nämlich die untere Integrationsgrenze.

2. Hauptsatz

Satz (HDI)

Sei f eine stetige Funktion mit dem Definitionsbereich D und $a, b \in D$. Dann gilt:

1. Die Integralfunktion $\int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f in D

2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f in D ist.

Schreibweise: $F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$

Beispiele:

$$\int_0^1 (6x^5)dx = [x^6]_0^1 = 1^6 - 0^6 = 1 \quad \int_0^\pi (\sin x)dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

Eigenschaften:

$$-\int_a^b f(x)dx = -[F(b) - F(a)] = F(a) - F(b) = \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Gilt $f(-x) = -f(x)$, so ist $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Beispiele:

$$\int_0^\pi (2 \sin x + \cos x)dx = [-2 \cos x + \sin x]_0^\pi = -2 \cos \pi + \sin \pi + 2 \cos 0 - \sin 0 = 2 + 2 = 4$$

$$\int_{-\pi}^\pi (\sin x + 4x^3)dx = 0, \text{ da } f(-x) = \sin(-x) + 4(-x)^3 = -\sin x - 4x^3 = -(\sin x + 4x^3) = -f(x)$$

Wichtige Stammfunktionen:

Schreibweise für eine beliebige Stammfunktion von f : $\int f(x)dx$ („unbestimmtes Integral“)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ für } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$\int (\sin x) dx = -\cos x + C$$

$$\int (\cos x) dx = \sin x + C$$