§19. Flächenberechnung

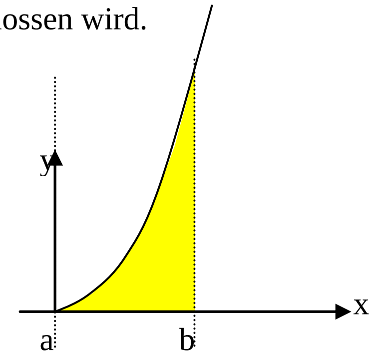
1. Streifenmethode

Problem:

Es soll der Flächeninhalt A angenähert werden, der vom Graphen einer Funktion und der x-Achse in einem bestimmten Intervall [a; b] eingeschlossen wird.

Beispiel:

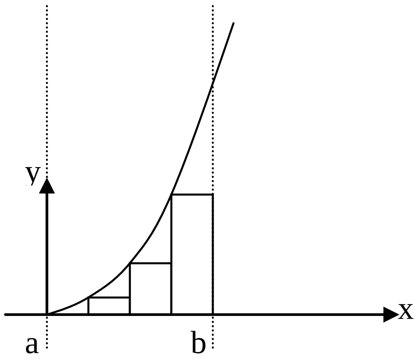
$f(x) = x^2$; $a = 0$; $b = 2$



Lösung:

Das Flächenstück wird in n rechteckige Streifen mit derselben Breite Δx zerlegt, deren Flächeninhalte addiert werden. Je größer die Anzahl n der Streifen ist, desto besser wird der gesuchte Flächeninhalt angenähert.

n = 4 Streifen dem Graphen *einbeschrieben*

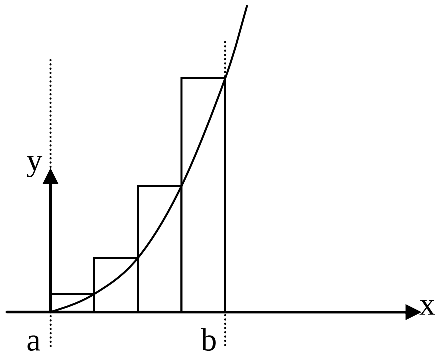


Breiten der Rechtecke: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

Höhen: ① $h_1 = f(0\cdot½) = 0$
② $h_2 = f(1\cdot½) = 0{,}25$
③ $h_3 = f(2\cdot½) = 1$
④ $h_4 = f(3\cdot½) = 2{,}25$

Fläche: $U_4 = 0\cdot½ + 0{,}25\cdot½ + 1\cdot½ + 2{,}25\cdot½ =$
$= 1{,}75$

Streifen dem Graphen *umbeschrieben*



Breiten der Rechtecke: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

Höhen: ① $h_1 = f(1\cdot½) = 0{,}25$
② $h_2 = f(2\cdot½) = 1$
③ $h_3 = f(3\cdot½) = 2{,}25$
④ $h_4 = f(4\cdot½) = 4$

Fläche: $O_4 = 0{,}25\cdot½ + 1\cdot½ + 2{,}25\cdot½ + 4\cdot½ =$
$= 3{,}75$

Merke

Die auf diese Weise bestimmte Fläche U_n heißt *Untersumme* (Rechtecke sind dem Graphen einbeschrieben) und O_n heißt *Obersumme* (Rechtecke sind dem Graphen umbeschrieben).

Es gilt stets: $U_n < A < O_n$

2. Exakter Flächeninhalt

Problem:
Wie kann mit Ober- und Untersumme der exakte Flächeninhalt A berechnet werden?

Lösung anhand des Beispiels:

① Bestimmung der Obersumme O_n für beliebiges n

Breite: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

$$O_n = \frac{2}{n}\cdot\left[f(1\cdot\frac{2}{n}) + f(2\cdot\frac{2}{n}) + \ldots + f(n\cdot\frac{2}{n})\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left[\left(1\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + \left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(n\cdot\frac{2}{n}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left[1^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + 2^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + n^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{\left[n(n+1)(2n+1)\right]}{6} =$$

$$= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(2n^2+n+2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{8}{6}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3} = \frac{4}{3}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

② Berechnung des Grenzwertes für $n \to \infty$.

$$A = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] = 2\frac{2}{3}$$

Analog:

Für die Untersumme U_n ergibt sich:

$$U_n = \frac{2}{n}\cdot\left[0^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + (n-1)^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\right] = \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{\left[(n-1)\cdot((n-1)+1)\cdot(2(n-1)+1)\right]}{6} = \frac{4}{3}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

Somit: $A = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 2\frac{2}{3}$

3. Bestimmtes Integral

Satz
Die Grenzwerte von Obersumme und Untersumme stimmen überein. Ihr Betrag gibt die Maßzahl des Flächeninhaltes A an.

Definition
Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$) heißt *bestimmtes Integral der Funktion f in den Grenzen von a bis b*.

Schreibweise: $\int\limits_a^b f(x)dx$ „Integral von f(x)dx von a bis b“

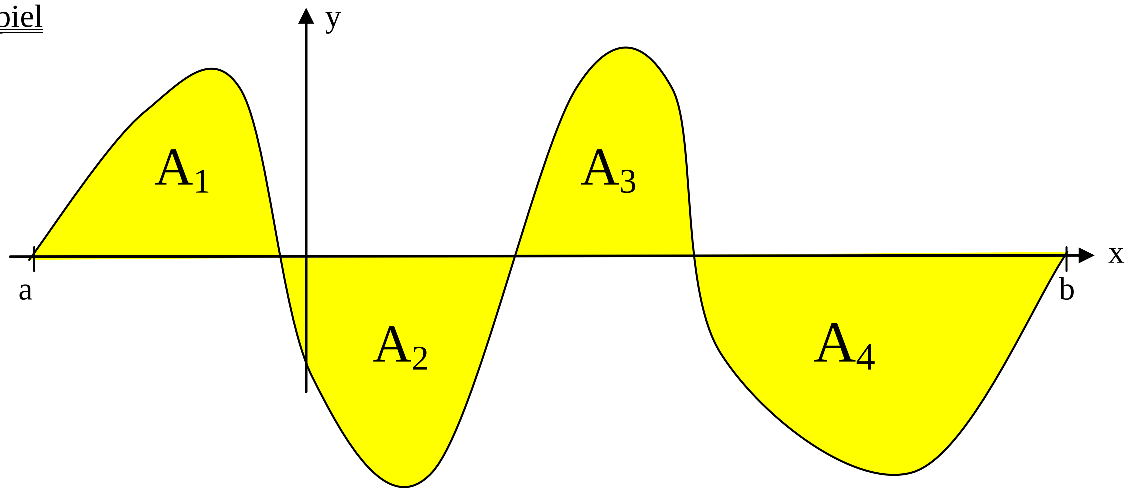
Also gilt für f(x)= x²:

$$\int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^2 x^2 dx = 2\frac{2}{3}$$

4. Geometrische Bedeutung

Merke:
Das bestimmte Integral entspricht der Summe der „gerichteten Flächen“ zwischen Graphen und x-Achse. Bei der Integration von links nach rechts werden Flächen unterhalb der x-Achse von den Flächen oberhalb der x-Achse subtrahiert.

Beispiel



$$\int\limits_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$