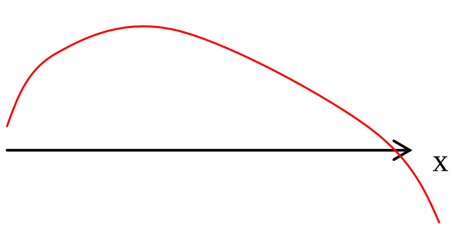
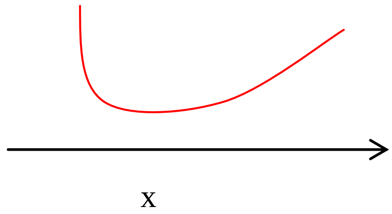
§18. Die 2. Ableitung

1. Krümmungsverhalten

Ein Graph heißt in einem Intervall J *rechtsgekrümmt*, wenn die Steigung der Tangente in J monoton abnimmt.
Ein Graph heißt in einem Intervall J *linksgekrümmt*, wenn die Steigung der Tangente in J monoton zunimmt.





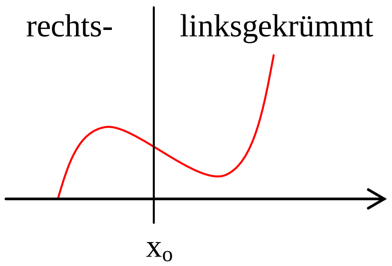
Man muss also die Ableitung f'(x) erneut ableiten, um das Änderungsverhalten der Tangentensteigung zu erhalten. Die entstehende Funktion f'' („f zwei-Strich“) nennt man die *zweite Ableitung von f*. Dazu muss die Ableitung differenzierbar sein. Man sagt dann, dass f *zweimal differenzierbar* ist.

Es gilt:

Ist f stetig in [a; b], dann
$f''(x) < 0$ in]a; b[=> G_f rechtsgekrümmt in [a; b]
$f''(x) > 0$ in]a; b[=> G_f linksgekrümmt in [a; b]

2. Wendepunkt

Eine Stelle x_o, an der die Funktion zweimal differenzierbar ist und an der sich das Krümmungsverhalten ändert, heißt *Wendestelle*, der zugehörige Graphenpunkt W*endepunkt W*.



Es gilt:

1. Ist x_o Wendestelle, dann folgt: $f''(x_o) = 0$
2. Ist $f''(x_o) = 0$, $f'''(x_o) \neq 0$ und f''' stetig an der Stelle x_o, so hat der Graph von f einen Wendpunkt an der Stelle x_o.

3. Extrempunkte-Kriterium

Ist f stetig in x_o, $f'(x_o) = 0$ und $f''(x_o) > 0$, dann hat f an der Stelle x_o ein *lokales Minimum*.
Ist f stetig in x_o, $f'(x_o) = 0$ und $f''(x_o) < 0$, dann hat f an der Stelle x_o ein *lokales Maximum*.

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht!
z.B. $f(x) = x^4$: Tiefpunkt T(0/0), aber $f'(0) = 0$; $f''(0) = 0$

4. Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x$
Gib Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f an und bestimme den Wendepunkt.

Lösung:

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x - 1)(x + 3)$
$f''(x) = 6x + 6 = 6(x + 1)$
$f'''(x) = 6$

Extrema: $f'(x) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 1$ $y_1 = -5$
$x_2 = -3$ $y_2 = 27$
$f''(1) = 12 > 0$ => Tiefpunkt T(1|–5)
$f''(-3) = -12 < 0$ => Hochpunkt H(–3|27)

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_3 = -1$ $y_3 = 11$
Entweder: ① $f'''(-1) = 6 \neq 0$
Oder: ② $f''(x)$ besitzt VZW von – nach + bei $x_3 = -1$
=> Wendepunkt W(–1|11)

5. Wendetangente

Die Tangente an den Graphen einer Funktion im Wendepunkt heißt *Wendetangente*.
Aus Beispiel von oben: (Tangente: vgl. §07 | 3.)

$x_o = -1$

$f(x_o) = 11$

$f'(x_o) = 6\cdot(-1) + 6 = 0$

Wendetangente: w: $y = 11$

6. Terrassenpunkt

Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente heißt *Terrassenpunkt*. Hier gilt $f'(x_o) = 0$, aber das Monotonieverhalten ändert sich nicht.

Ist f stetig in x_o, $f'(x_o) = 0$, $f''(x_o) = 0$ und $f'''(x_o) \neq 0$, dann ist $E(x_o \mid f(x_o))$ einTerrassenpunkt.

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht!
z.B. $f(x) = x^5$: Terrassenpunkt E(0|0), aber $f''(0) = 0$; $f'''(0) = 0$