

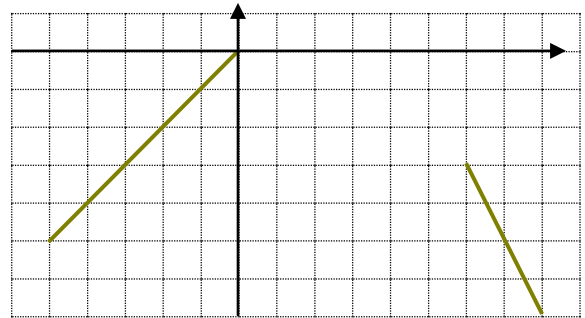
## §15. Modellieren mit Funktionen

Hier wird ein Funktionsterm gesucht, der aus vorgegebenen Bedingungen modelliert wird.

### Beispiel:

Eine Straße soll möglichst harmonisch über eine Kuppe gebaut werden.

Der Graph welcher ganzrationalen Funktion möglichst geringer Ordnung ist geeignet, die beiden Straßenstücke auszurunden?



### Lösung:

- ① **Schreibe einen allgemeinen Funktionsterm auf und bestimme seine Ableitung.**

Parabel erscheint geeignet

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

- ② **Formuliere aus den Bedingungen Gleichungen und vereinfache jede. (Es müssen mindestens so viele Bedingungen auffindbar sein, wie man unbekannte Koeffizienten hat).**

$$\text{I } f(0) = 0 \quad 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c = 0}$$

$$\text{II } f'(0) = 1 \quad 2 \cdot 0 \cdot a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b = 1}$$

$$\text{III } f(3) = -1,5 \quad 9 \cdot a + 3 \cdot b + c = -1,5 \quad \Rightarrow \quad 9a + 3 = -1,5$$

$$\text{IV } f'(3) = -2 \quad 2 \cdot 3 \cdot a + b = -2 \quad \Rightarrow \quad 6a + 1 = -2$$

Es sind mehr Gleichungen als Unbekannte!

- ③ **Löse die Gleichungen.**

$$\text{Aus IV } \mathbf{a = -0,5}$$

$$\text{In III } -4,5 + 3 = -1,5$$

$-1,5 = -1,5$  (w) Hier könnte auch eine falsche Aussage entstehen, dies würde bedeuten, dass das Problem von keiner quadratischen Funktion gelöst wird. Man müsste es mit einem Polynom 3. Grades versuchen.

- ④ **Gib den Funktionsterm an.**

$$f(x) = -0,5 x^2 + x$$

### Allgemeine Terme - Faustregeln:

- Polynome n-ten Grades:  $ax^n + \dots + mx + n$
- Rationale Funktionen:  $\frac{ax^n + \dots}{gx^m + \dots}$  oder  $\frac{a(x-x_1)(x-x_2)\dots}{b(x-x_3)(x-x_4)\dots}$
- Periodische Funktionen:  $a \cdot \sin(bx + c)$ ,  $a \cdot \cos(bx + c)$  evtl.  $a \cdot \tan(bx + c)$
- Logarithmus:  $a \cdot \ln(bx + c)$
- Exponential:  $a \cdot e^{bx + c}$  oder  $a \cdot e^{bx}$
- Glocke:  $a \cdot e^{-bx^2}$

Beispiel:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion hat in  $A(1|3)$  einen Hochpunkt und in  $B(3|0)$  einen Tiefpunkt. Bestimme einen Funktionsterm mit möglichst geringer Ordnung.

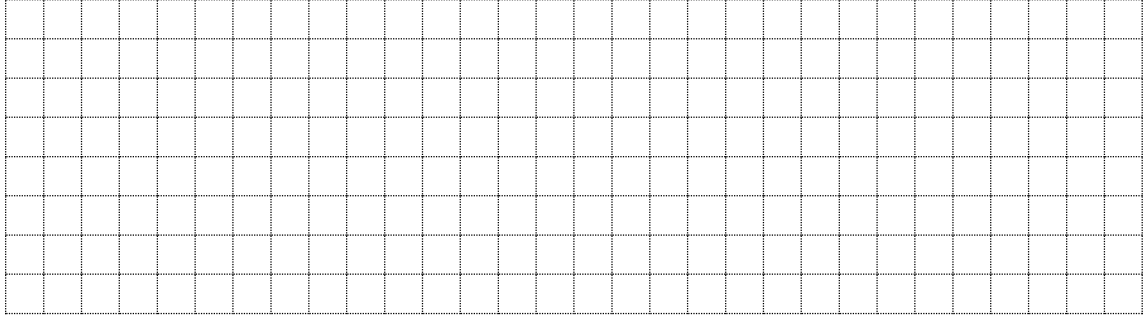
Lösung:

Es scheint eine \_\_\_\_\_ Funktion \_\_\_\_\_ geeignet.

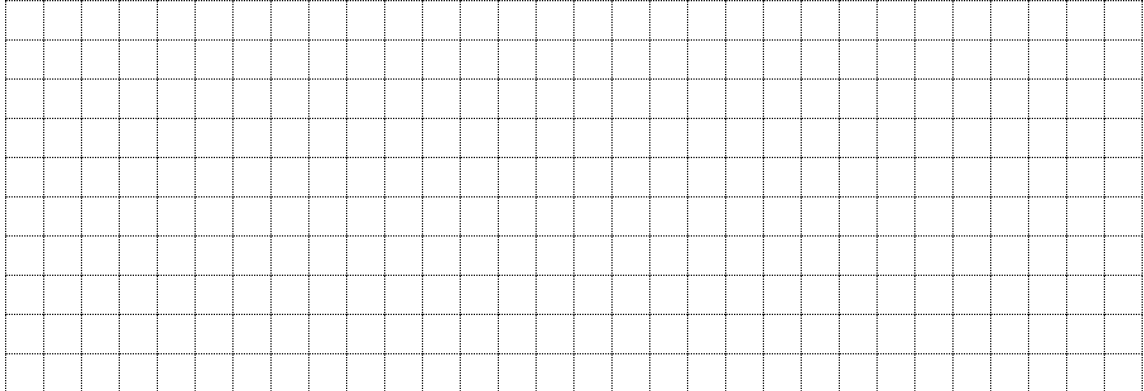
①



②



③



④ \_\_\_\_\_