§14. Extremwertprobleme

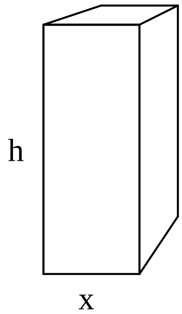
1. Beispiel

Eine quaderförmige 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche soll so hergestellt werden, dass der Materialverbrauch möglichst gering ist. Berechne die Höhe h_{min} und die Länge x_{min} der Grundkante dieser Milchtüte. Gib auch den zugehörigen Flächeninhalt A_{min} der Verpackung an.

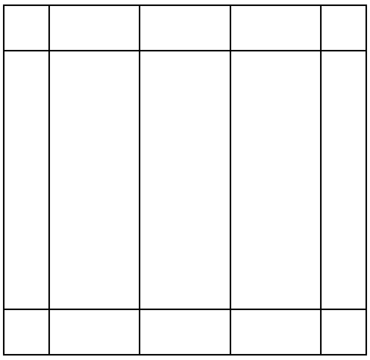
Flächeninhalt A des Verpackungsmaterials

Beschrifte das unten gezeichnete Netz der Milchtütenverpackung mit den Bezeichnungen für die jeweiligen Längen. Berechne dann den Flächeninhalt A der Verpackung in Abhängigkeit der Höhe h und der Länge x der Grundkante der Milchtüte.

Milchtüte:



Netz:



A = ______________________

____

Abmessungen einer realen Milchtüte

Miss die Längen auf der Innenseite der Milchtüte und berechne damit die restlichen Größen:

Grundkante: x = __________ dm

Höhe: h = __________ dm

Innenvolumen: V = __________ dm³

Flächeninhalt der Verpackung: A = __________ dm²

2. Lösung von Extremwertproblemen

① Frage Dich, welche Größe minimiert bzw. maximiert werden soll.

Hier: Flächeninhalt A der Verpackung (minimiert)

② Zeichne ggf. eine Skizze und gib eine Gleichung für diese Größe an. (Hier kommen noch mehrere Unbekannte vor)

Skizze: s. oben

$A = (h + x)\cdot 4x$

③ Ermittle aus der Aufgabenstellung den Zusammenhang zwischen den Unbekannten, also die Nebenbedingung(en) und löse entsprechend auf – Benennungen weglassen.

Hier: „Literpackung“ und „quadratische Grundfläche“:

$h\cdot x^2 = 1\ (dm^3)$

Nebenbedingung: $h = \frac{1}{x^2}$

④ Setze die Nebenbedingung(en) ein und ermittle so den Term der Zielfunktion, in dem nur noch 1 Variable vorkommt und gib eine sinnvolle Definitionsmenge an.

$A(x) = \left(\frac{1}{x^2} + x\right)\cdot 4x$

Zielfunktion: $A(x) = \frac{4}{x} + 4x^2$ $D = \mathbb{R}^+$

⑤ Bestimme nun die Extrema der Zielfunktion mit Hilfe der Ableitung.

$A(x) = \frac{4}{x} + 4x^2$

$A'(x) = -\frac{4}{x^2} + 8x = \frac{-4 + 8x^3}{x^2}$

$A'(x) = 0$

$-4 + 8x^3 = 0$

$8x^3 = 4$

$x = \sqrt[3]{0,5}$

Für $x < \sqrt[3]{0,5}$ ist $A'(x) < 0$; für $x > \sqrt[3]{0,5}$ ist $A'(x) > 0$ (auch über VZ-Tabelle)

Also gibt es ein Minimum bei $x = \sqrt[3]{0,5}$ mit $A_{min} = A(\sqrt[3]{0,5}) = \frac{4}{\sqrt[3]{0,5}} + 4\left(\sqrt[3]{0,5}\right)^2 \approx 7,56\ (dm^2)$

⑥ Ggf. Randwertbetrachtung durchführen.
Hier wegen Monotonieverhalten nicht nötig

$\lim_{x\to 0} A(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x} + 4x^2\right) = \infty$

$\lim_{x\to \infty} A(x) = \lim_{x\to \infty}\left(\frac{4}{x} + 4x^2\right) = \infty$