§13. Die natürliche Logarithmusfunktion

1. Umkehrfunktion der e-Funktion

Da g: $x \mapsto e^x$ eine streng monotone Funktion ist, ist sie umkehrbar.

g: $y = e^x$ $D_f = \mathbb{R}$ $W_f = \mathbb{R}^+$

$\log_e y = x$ Abkürzung: $\log_e y = \ln y$ ("Logarithmus naturalis")

$g^{-1}: y = \ln x$

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion heißt *natürliche Logarithmusfunktion* f: $x \mapsto \ln x$.

Es gilt für f: $D_f = \mathbb{R}^+$ $W_f = \mathbb{R}$

2. Eigenschaften von f: x ↦ lnx

$D_f =]0;\infty[$

Beziehungen

Es gelten die Formeln:

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$	$\ln(e^x) = x$
$\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$	$e^{\ln x} = x$
$\ln(a^b) = b \cdot \ln a$	

Mit $e^{\ln x} = x$ bestimmt man die Ableitung:

$(e^{\ln x})' = 1$;

$e^{\ln x} (\ln x)' = 1$ (Kettenregel)

$x (\ln x)' = 1$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

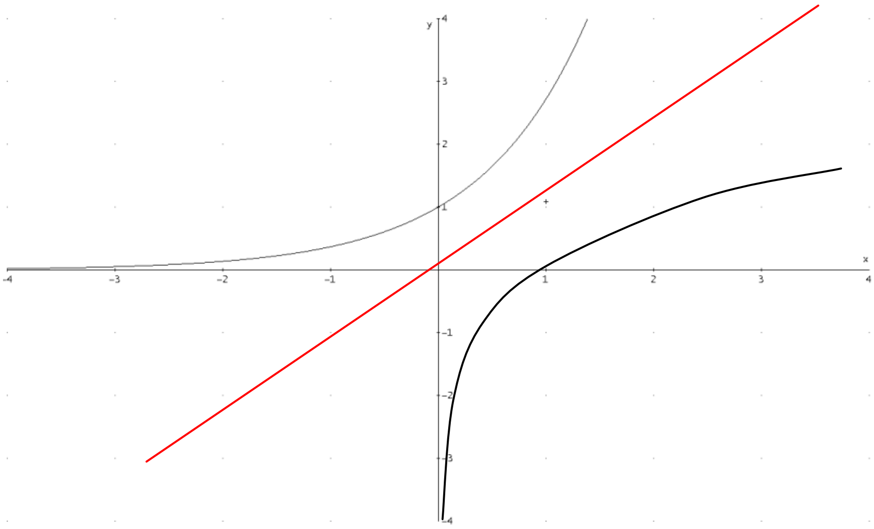
Beispiele

Löse die Gleichungen $e^{x-1} = 2$ und $\ln(2x-3)^2 = 0$

- $e^{x-1} = 2$ | ln..
  $x - 1 = \ln 2$
  $x = \ln 2 + 1 \approx 1.69$
- $\ln(2x-3)^2 = 0$
  $2 \cdot \ln(2x-3) = 0$
  $\ln(2x-3) = 0$| e¨
  $2x - 3 = e^0$
  $2x - 3 = 1$
  $2x = 4$
  $x = 2$

Weitere Eigenschaften

- Graph:



- einzige Nullstelle: x = 1 ln 1 = 0 N(1|0)
- Verhalten an den Rändern von D: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$ für x > 0 keine Asymptote

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ vertikale Asymptote: **x = 0**

- Ableitung und Monotonie: f(x) = lnx $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, da x > 0

  Da f'(x) > 0, ist f streng monoton zunehmend im Definitionsbereich D.

3. Verkettete Funktionen x $\mapsto$ ln (g(x))

Die Funktion g(x) heißt *Argument der ln-Funktion*.

Beispiel: Bestimme für f mit f(x) = ln(2x + 2) Definitionsmenge, Nullstellen und Ableitung

- Definitionsmenge: *Argument > 0*

  Bed.: 2x + 2 > 0 => x > –1

  Also: $D_f =]-1;\infty[$
- Nullstellen: Bed.: f(x) = 0

  ln(2x + 2) = 0

  2x + 2 = 1

  x = –0,5
- Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2x+2} \cdot 2 = \frac{2}{2(x+1)} = \frac{1}{x+1}$