§12. Die natürliche Exponentialfunktion

1. Exponentialfunktion

Beispiel:
In einer Bakterienkultur verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien nach einer Stunde. Aus wie viel Bakterien besteht die Kultur nach 5 Stunden, wenn sie anfangs aus 10 000 bestand?

Lösung:
Funktionsterm: $\boxed{y = a \cdot b^x}$ a: Anfangswert; b: Wachstumsfaktor („Erhöhung auf...“)
Hier: $a = 10\,000$; $b = 2$
Also: $y = 10\,000 \cdot 2^x$
Nach 5 Stunden: $y = 10\,000 \cdot 2^5 = 320\,000$

2. Ableitung

Problem: Es soll die Ableitung der Exponentialfunktion mit $f(x) = b^x$ bestimmt werden.

Lösung: Differenzenquotient/Differentialquotient

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = \frac{b^{x_0+h} - b^{x_0}}{h} = \frac{b^{x_0} b^h - b^{x_0}}{h} = b^{x_0} \frac{b^h - 1}{h}$$

Damit: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} b^{x_0} \frac{b^h - 1}{h} = b^{x_0} \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$

Bestimmung des Grenzwerts $\lim\limits_{x \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$ mit Tabellenkalkulation.

Ergebnis: Es existiert ein Wert für b, so dass der Grenzwert 1 wird.

Bestimmung dieses Werts für b:

Es muss gelten: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1$ Für h kann man $\frac{1}{n}$ einsetzen und $n \to \infty$ laufen lassen.

Damit: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$; Zähler und Nenner des Bruchs müssen für große n gleich sein.

Also $b^{\frac{1}{n}} - 1 \approx \frac{1}{n}$ bzw. $b^{\frac{1}{n}} \approx \frac{1}{n} + 1$; somit: $b \approx \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$

Der exakte Wert errechnet sich als Grenzwert für $n \to \infty$:

Der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$ existiert und ist eine irrationale Zahl. Sie heißt *Euler'sche Zahl* und wird mit e bezeichnet.
Näherungswert: $e \approx 2{,}718281828...$

Somit gilt für die Funktion mit $f(x) = e^x$: $f'(x_0) = e^{x_0} \lim\limits_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$

3. Die natürliche Exponentialfunktion

Die Funktion f: $x \mapsto e^x$ heißt *natürliche Exponentialfunktion*.

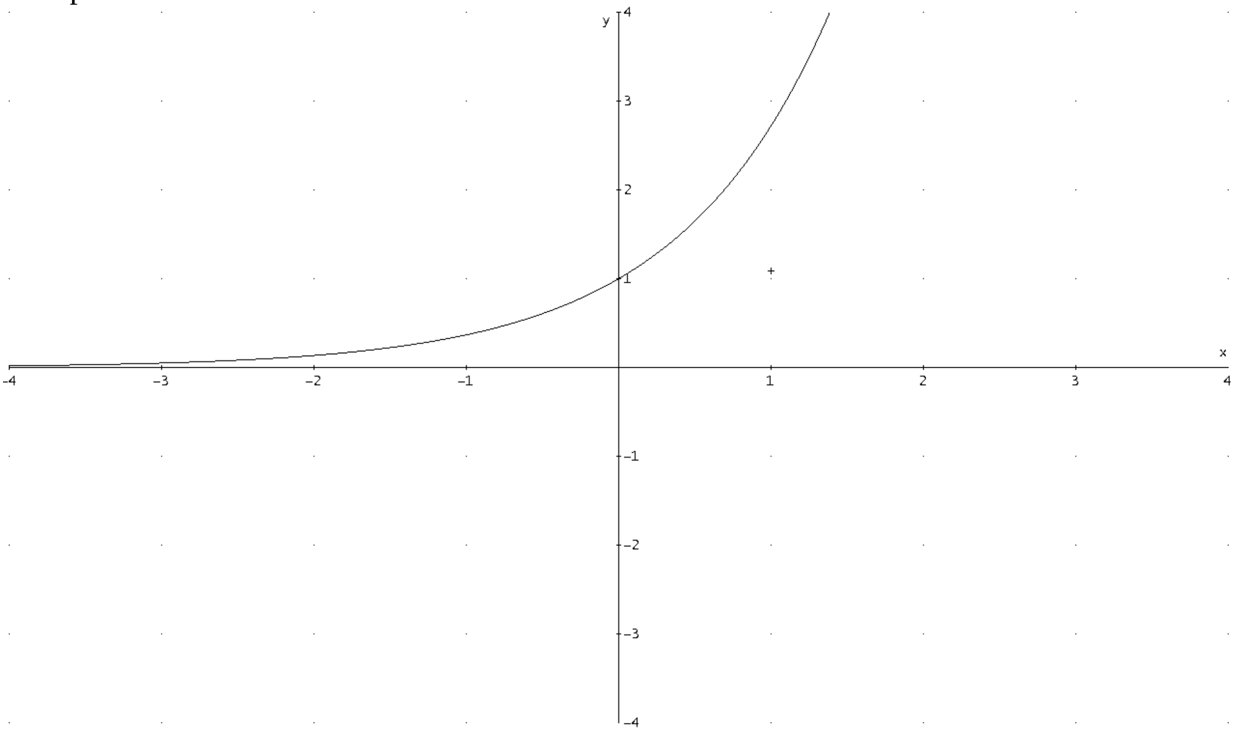
Für ihre Ableitungsfunktion gilt: $f'(x) = e^x$

Eigenschaften:

f: $x \mapsto e^x$

- Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$
- Nullstellen: Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt: Es gibt keine Nullstellen
- SP mit y-Achse: $f(0) = e^0 = 1$ also : $S_y(0/1)$
- Ränder von D_f: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ für x > 0 keine Asymptote

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ für x < 0 : horizontale Asymptote: **y = 0**
- Ableitung und Monotonie: Es gilt: $f'(x) = e^x$
  Da $f'(x) > 0$, ist f streng monoton zunehmend im Definitionsbereich D.
- Graph:



Besonderheiten:

- Untersuche das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

  $$f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{(e^{-x}-1)\cdot e^x}{(e^{-x}+1)\cdot e^x} = \frac{e^0 - e^x}{e^0 + e^x} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{-e^x+1}{e^x+1} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

  Also ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.

- Bestimme die Ableitung von $f(x) = e^{3x^2 + 2x}$

  $f'(x) = e^{3x^2 + 2x} \cdot (6x + 2)$ (Kettenregel!)