§11. Ableitung verketteter Funktionen

1. Verkettete Funktionen

Definition:
Für 2 Funktionen v: $x \mapsto v(x)$ und u: $x \mapsto u(x)$ heißt die Funktion
$u \circ v$: $x \mapsto u(v(x))$ (Lies:„u nach v: x auf u von v(x)“)
Verkettung der Funktionen u und v.
v heißt *innere* und u *äußere Funktion*.

Beispiel: $u(x) = x^2 + 1$ $v(x) = \sin x$
Bestimme die Funktionsterme von $f = u \circ v$ und $g = v \circ u$

Lösung: $f(x) = u(v(x)) = u(\sin x) = (\sin x)^2 + 1$
$g(x) = v(u(x)) = v(x^2 + 1) = \sin(x^2 + 1)$

2. Kettenregel

Problem: Es soll die Ableitung der verketteten Funktion $f = u \circ v$ mit $f(x) = u(v(x))$ bestimmt werden. (D’: Differenzierbarkeitsbereich von $u \circ v$)

Lösung: Differenzenquotient von f:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{u(v(x))-u(v(x_o))}{x-x_o} = \frac{[u(v(x))-u(v(x_o))]\cdot[v(x)-v(x_o)]}{(x-x_o)\cdot[v(x)-v(x_o)]} =$$

$$= \frac{u(v(x))-u(v(x_o))}{v(x)-v(x_o)} \cdot \frac{v(x)-v(x_o)}{x-x_o};$$

also: $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = u'(v(x_o)) \cdot v'(x_o)$

$$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Also: Erst die äußere Funktion ableiten, dabei die innere stehen lassen und dann die innere Funktion ableiten und dazu multiplizieren („*Nachdifferenzieren* der inneren Funktion“)

Beispiele:

- $f(x) = \sin(3x^2 - 4x)$ => $f'(x) = \cos(3x^2 - 4x) \cdot (6x - 4)$
- $f(x) = (x^3 - 7x^2)^9$ => $f'(x) = 9(x^3 - 7x^2)^8 \cdot (3x^2 - 14x)$
- $f(x) = \sqrt{\sin(x^3+2)}$ => $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^3+2)}} \cdot \cos(x^3+2) \cdot 3x^2 = \frac{3x^2\cos(x^3+2)}{2\sqrt{\sin(x^3+2)}}$

Hinweis: Bei manchen Funktionen muss mehrmals nacheinander nachdifferenziert werden.

- $f(x) = 3x \cdot \sin\left(\sqrt{x^2+2}\right)$ => $f'(x) = 3 \cdot \sin\left(\sqrt{x^2+2}\right) + 3x \cdot \cos\left(\sqrt{x^2+2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x =$

$$= 3 \cdot \sin\left(\sqrt{x^2+2}\right) + \frac{3x^2 \cdot \cos\left(\sqrt{x^2+2}\right)}{\sqrt{x^2+2}}$$ Produktregel (§05 | 1.)