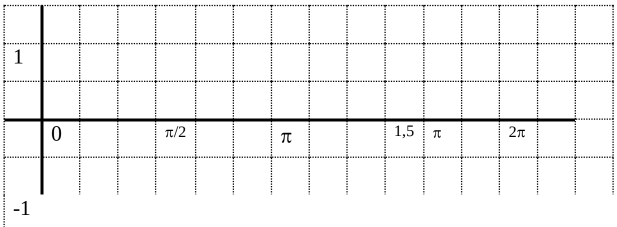
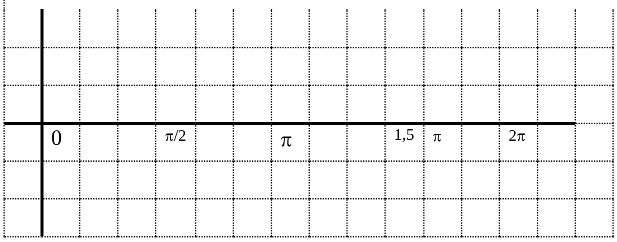
§10. Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktion

1. Graphisches Verfahren

Gegeben ist der Graph der Funktion
f: x $\mapsto$ sin x.



Ermittle den Graphen
der zugehörigen Ableitungsfunktion.



<u>Ergebnis:</u> Es gilt: $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

Außerdem gilt: $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

2. Rechnerisches Verfahren

<u>Einschub:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

<u>Problem:</u> f(x) = sinx => f'(x) = ?

<u>Lösung:</u> Differenzenquotient von f:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{2\cos(\frac{1}{2}(x+h+x))\sin(\frac{1}{2}(x+h-x))}{h}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$$

Also: $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \cos x$$