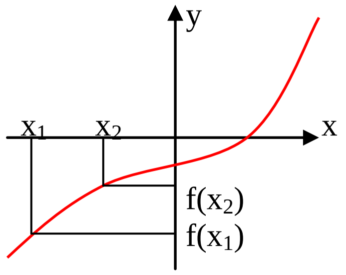
§08. Monotonie und Extrempunkte

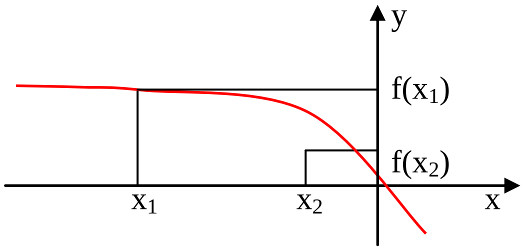
1. Monotonieverhalten

Sei f eine Funktion f: $x \mapsto f(x)$ mit $x \in D$. Gilt für alle und $x_1; x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$:

· $f(x_1) < f(x_2)$, so heißt f *streng monoton zunehmend*
· $f(x_1) \leq f(x_2)$, so heißt f *monoton zunehmend*
· $f(x_1) > f(x_2)$, so heißt f *streng monoton abnehmend*
· $f(x_1) \geq f(x_2)$, so heißt f *monoton abnehmend*



$f(x_1) < f(x_2)$
f ist streng monoton zunehmend
(y-Werte werden größer)

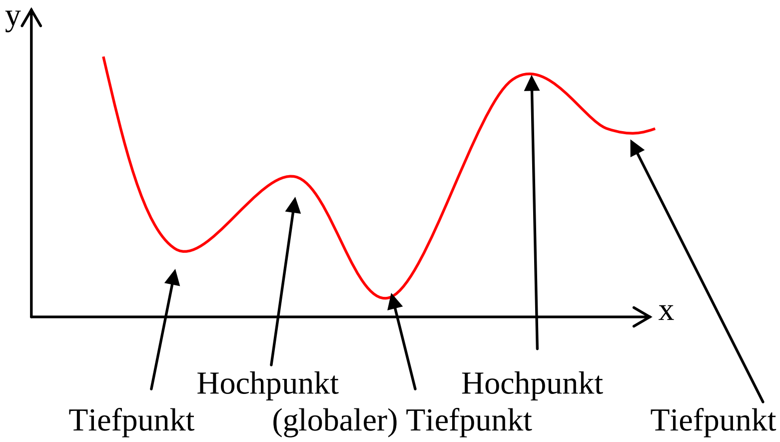


$f(x_1) \geq f(x_2)$
f ist monoton abnehmend
(y-Werte werden kleiner oder bleiben gleich)

2. Extremwerte

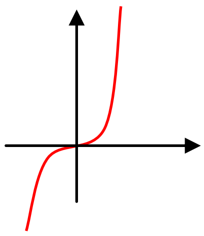
<u>Definitionen</u>

- Eine Funktion f hat im Inneren der Definitionsmenge ein *lokales Maximum (Minimum)*, wenn die Funktionswerte in einer gewissen Umgebung von x_o kleiner sind (größer sind) als bei x_o. Der größte (kleinste) Funktionswert in der Definitionsmenge heißt *globales Maximum (Minimum)*.
- Das *Extremum (Maximum/Minimum) – Plur.: Extrema –* ist der Funktionswert $f(x_o)$
- Die *Maximal-/Minimalstelle* der zugehörige x-Wert x_o
- Der entsprechende Punkt heißt *Extrempunkt* (*Hochpunkt/Tiefpunkt*).



Notwendige Bedingung für Extrema:
Hat eine differenzierbare Funktion f im Innern von D_f ein Extremum, dann gilt: $f'(x_o) = 0$

Achtung: Aus $f'(x) = 0$ kann nicht die Existenz eines Extremums geschlossen werden:
$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Dort liegt aber kein Extremum vor.



Bemerkung:
An einer Extremstelle ändert sich das Monotonieverhalten einer Funktion.
An der Minimalstelle von fallend nach steigend, an der Maximalstelle von steigend nach fallend.

3. Monotonieverhalten und Ableitung

Satz:
Gilt für die Ableitung einer im Intervall [a; b] stetigen und in]a;b[differenzierbaren Funktion:
$f'(x) > 0$ für $x \in\,]a; b[$, dann ist f streng monoton zunehmend für $x \in [a; b]$,
$f'(x) < 0$ für $x \in\,]a; b[$, dann ist f streng monoton abnehmend für $x \in [a; b]$.

Hierzu ist eine Vorzeichen–Tabelle hilfreich!

Beispiel:
Bestimme Lage und Art der Extrempunkte und das Monotonieverhalten von f mit
$f(x) = -x^3 + 12x^2 - 45x + 2$

Lösung:

① Bestimme die erste Ableitung $f'(x)$.

$f'(x) = -3x^2 + 24x - 45$

② Bestimme mit dem Ansatz $f'(x) = 0$ die Stellen mit waagrechter Tangente, faktorisiere den Term (bei Brüchen auch den Nenner!) und berechne die zugehörigen y-Koordinaten.

$f'(x) = 0$

$-3x^2 + 24x - 45 = 0$

$-3(x^2 - 8x + 15) = 0$

$-3(x - 5)(x - 3) = 0$

$x_1 = 5$; $y_1 = -48$ Es müssen die x-Werte in f(x) eingesetzt werden!
$x_2 = 3$; $y_2 = -52$

④ Untersuche nun die Vorzeichen der 1. Ableitung. Hilfreich dafür ist oft eine Vorzeichentabelle.

		3	5
-3	–	–	–
$x-3$	–	+	+
$x-5$	–	–	+
f′(x)	–	+	–
	MIN	MAX	

Benötigte Stellen zur Begrenzung der VZ-Bereiche sind immer
① alle Definitionslücken bzw. –ränder und
② die Nullstellen der 1. Ableitung.
Hier nur ②, nämlich 3 und 5

⑤ Gib nun die Monotoniebereiche und Extrempunkte an:
f ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; 3]$
f ist streng monoton zunehmend für $x \in [3; 5]$
f ist streng monoton abnehmend für $x \in [5; \infty[$

Tiefpunkt: T(3/-52)
Hochpunkt: H(5/-48)