§07. Anwendungen

1. Graphenpunkte mit horizontalen Tangenten

Bedingung für „horizontale Tangente“: $f'(x) = 0$

Beispiel: Bestimme die Punkte mit horizontalen Tangenten: $f(x) = 3x^2 + 2x^3$

Lösung: Es gilt: $f'(x) = 6x + 6x^2$

Bed.: $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow 6x + 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow 6x(x + 1) = 0$

$x_1 = 0; \quad y_1 = f(0) = 0 \quad P_1(0/0)$

$x_2 = -1; \quad y_1 = f(-1) = 3 - 2 = 1 \quad P_2(-1/1)$

2. Scheitel einer Parabel

Beispiel: Bestimme den Scheitel der Parabel mit der Gleichung $y = 3x^2 + 3x$

Lösung: ① Ableiten:

$f'(x) = 6x + 3$

② Ableitung Null setzen und Koordinaten bestimmen

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x + 3 = 0$

$x = -0{,}5; \quad y = 3\cdot(-0{,}5)^2 + 3\cdot(-0{,}5) = -0{,}75 \quad S(-0{,}5/-0{,}75)$

3. Tangentengleichung

Problem: Die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x_o/f(x_o))$ soll bestimmt werden:

Tangentengleichung: $y = mx + t$ | gesucht: m und t

Lösung: $m = f'(x_o)$

für t: Punkt P in Tangentengleichung einsetzen:

$y = m \cdot x + t$

$f(x_o) = f'(x_o) \cdot x_o + t$

$t = f(x_o) - f'(x_o) \cdot x_o$

in Tangentengleichung m und t einsetzen:

$y = m \cdot x + t$

$y = f'(x_o) \cdot x + f(x_o) - f'(x_o) \cdot x_o$

> Tangentengleichung
> $y = f'(x_o) \cdot (x - x_o) + f(x_o)$

Beispiel : $f(x) = 5x^2 - 4 \quad P(2/ ?)$

Lösung: ① Ableiten: $f'(x) = 10x$

② Bestimme die drei für die Formel wichtigen Größen:

$x_o = 2$

$f(x_o) = 5\cdot2^2 - 4 = 16$

$f'(x_o) = 10\cdot2 = 20$

③ Setze ein und löse auf:

$y = 20\cdot(x - 2) + 16$

$y = 20x - 40 + 16$

$t: y = 20x - 24$

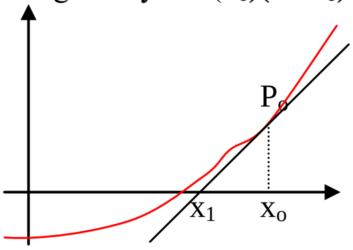
4. Newton-Verfahren

Problem: Nullstellen lassen sich nicht immer leicht berechnen. Mit einem Iterationsverfahren soll eine Näherung der Nullstelle gefunden werden.

Lösungsidee: Man nähert die Nullstelle x^* an zuerst durch einen Wert x_o (den Startwert), dann verbessert man die Annäherung (ausgehend von x_o) durch einen Wert x_1. Dann (ausgehend von x_1) durch einen Wert x_2....
Allgemein: Ausgehend von einem Wert x_n bestimmt man einen besseren Wert x_{n+1}

Newton-Verfahren: ① Man beginnt mit einem geschickt gewählten Startwert x_o.

② Vom Graphenpunkt $P_o(x_o|f(x_o))$ bestimmt man die Gleichung der Tangente: $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$



③ Die Nullstelle der Tangente ist der neue Näherungswert x_1:
Gleichung $0 = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$ nach x auflösen:
$f'(x_o)x - f'(x_o)\, x_o + f(x_o) = 0$
$f'(x_o)x = f'(x_o)\, x_o - f(x_o)$

$$\boxed{x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}}$$

④ Dann wiederholt man die Prozedur mit dem Wert x_1.

Allgemein: Der Näherungswert x_{n+1} ergibt sich aus dem Wert x_n durch:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Beispiel: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 5$

Lösung: $f'(x) = 3x^2 - 10x + 8$

Wertetabelle zum Auffinden des Startwerts

x	0	1	2	3	4
f(x)	–5	–1	–1	1	11

Nach dem Nullstellensatz (§06 | 2.) muss f mindestens eine Nullstelle im Intervall]2; 3[haben. Als Startwert bietet sich der Mittelwert $x_o = 2{,}5$ an.

$f(2{,}5) = -0{,}625$ $\qquad$ $f'(2{,}5) = 1{,}75$

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = 2{,}5 - \frac{-0{,}625}{1{,}75} = 2{,}857142857$$

$x_2 = 2{,}764136905$ (mit Tabellenkalkulationsprogramm) ....