§06. Stetigkeit

1. Begriff

<u>Definition</u>
Man nennt eine Funktion f mit Definitionsbereich D *stetig an einer Stelle x_o* im Inneren von D, wenn die Bedingung
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_o)$$
erfüllt ist.

<u>Bedeutung:</u>

① Überprüfe, ob x_o in D liegt. (Falls nicht ist die Frage nach der Stetigkeit sinnlos)

② Bestimme folgende 3 Terme:

a) $f(x_o)$

b) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

③ Überprüfe, ob alle drei denselben Zahlenwert haben (nicht ∞).

Wenn ja, dann ist f an der Stelle x_o stetig, wenn nein, dann ist f unstetig an der Stelle x_o.

<u>Beispiel:</u>

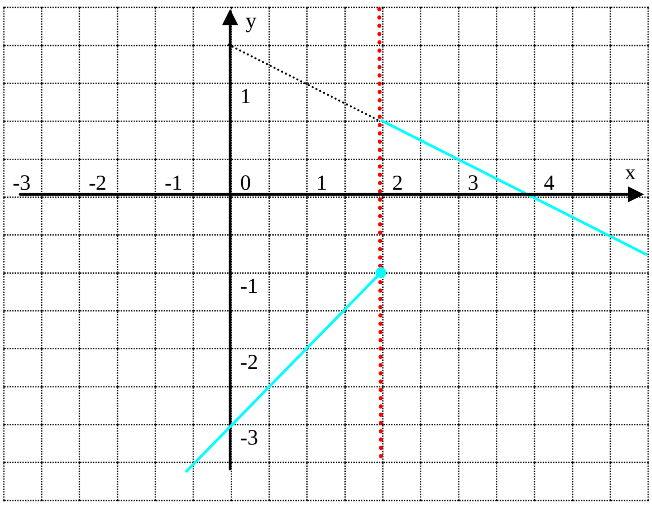
$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{für } x \le 2 \\ 2-\frac{1}{2}x & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

kritische Stelle: $x_o = 2$

① $f(2) = 2 - 3 = -1$

② $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x-3) = -1$

③ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(2-\frac{1}{2}x) = 1$



f ist nicht stetig an der Stelle $x_o = 2$
Sprungstellen sind Unstetigkeitsstellen.

Gilt für alle $x_o \in D$: f ist stetig an der Stelle x_o, so sagt man: „f ist stetig in D“.

<u>TIPP:</u> Jede stetige Funktion hat einen Graphen, den man ohne abzusetzen durchzeichnen kann.

2. Sätze über stetige Funktionen

Stetigkeit rationaler Funktionen

Jede *rationale Funktion* ist stetig in ihrem Definitionsbereich.

Wichtige Sätze

Nullstellensatz

Sei f eine in einem abgeschlossenen Intervall [a; b] stetige Funktion und die Stellen $x_1; x_2 \in [a; b]$.
Wenn die Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ verschiedene Vorzeichen haben, so gibt es mindestens eine Zahl $z \in\ ]x_1; x_2[$ mit $f(z) = 0$

Extremwertsatz

Wenn f eine in einem abgeschlossenen Intervall [a; b] stetige Funktion ist, dann nehmen die Funktionswerte sowohl einen größten als auch einen kleinsten Wert in diesem Intervall an.

Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Ist eine Funktion an der Stelle x_o differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Hinweis: Die Umkehrung gilt nicht: An einer Knickstelle ist die Funktion zwar nicht differenzierbar, aber dennoch stetig!