§05. Weitere Ableitungsregeln

1. Produktregel

Problem: Es soll die Ableitung des Produkts f = u · v mit f(x) = u(x)·v(x) bestimmt werden.
(D': Differenzierbarkeitsbereich von u und· v)

Lösung: Differenzenquotient von f:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{u(x)v(x)-u(x_o)v(x_o)}{x-x_o} = \frac{u(x)v(x)-u(x)v(x_o)+u(x)v(x_o)-u(x_o)v(x_o)}{x-x_o} =$$

$$= u(x)\frac{v(x)-v(x_o)}{x-x_o} + v(x_o)\frac{u(x)-u(x_o)}{x-x_o}$$

also: $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} =$

$$\lim_{x\to x_o} u(x) \lim_{x\to x_o} \frac{v(x)-v(x_o)}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o} v(x_o) \lim_{x\to x_o} \frac{u(x)-u(x_o)}{x-x_o} = u(x_o)v'(x_o)+v(x_o)u'(x_o)$$

Damit gilt die

Produktregel
Sind u und v zwei in einem (gemeinsamen) Bereich D' differenzierbare Funktionen, so gilt:
$f(x) = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$

Beispiele:

$f(x) = x^2\cdot(3x-1)$ => $f'(x) = x^2\cdot 3 + 2x\cdot(3x-1) = 3x^2 + 6x^2 - 2x = 9x^2 - 2x$

$f(x) = \sqrt{x}\cdot(3x^2-5x)$ => $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(3x^2-5x)+\sqrt{x}(6x-5) = \frac{3x^2-5x+2x(6x-5)}{2\sqrt{x}} =$

$$= \frac{3x^2-5x+12x^2-10x}{2\sqrt{x}} = \frac{15x^2-15x}{2\sqrt{x}}$$

2. Quotientenregel

Problem: Es soll die Ableitung des Quotienten $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bestimmt werden.

(D': gemeinsamer Differenzierbarkeitsbereich von u und v)

Lösung: Differenzenquotient von f:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{u(x_o)}{v(x_o)}}{x-x_o} = \frac{u(x)v(x_o)-u(x_o)v(x)}{v(x)v(x_o)(x-x_o)} =$$

$$= \frac{u(x)v(x_o)-v(x_o)u(x_o)+v(x_o)u(x_o)-u(x_o)v(x)}{v(x)v(x_o)(x-x_o)} =$$

$$= \frac{1}{v(x)v(x_o)}\cdot\frac{u(x)v(x_o)-v(x_o)u(x_o)-u(x_o)v(x)+v(x_o)u(x_o)}{(x-x_o)} =$$

$$= \frac{1}{v(x)v(x_o)}\cdot\frac{v(x_o)[u(x)-u(x_o)]-u(x_o)[v(x)-v(x_o)]}{(x-x_o)} =$$

$$= \frac{1}{v(x)v(x_o)}\left[v(x_o)\frac{u(x)-u(x_o)}{x-x_o}-u(x_o)\frac{v(x)-v(x_o)}{x-x_o}\right]$$

also: $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} =$

$$\frac{1}{v(x_o)v(x_o)}\left[v(x_o)u'(x_o)-v'(x_o)u(x_o)\right] = \frac{v(x_o)u'(x_o)-v'(x_o)u(x_o)}{[v(x_o)]^2}$$

Damit gilt die

Quotientenregel

Sind u und v zwei in einem (gemeinsamen) Bereich D' differenzierbare Funktionen mit $v(x) \neq 0$ in D', so gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{v(x)u'(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$$

Beispiele:

$$f(x) = \frac{3x^3}{x^2-3} \qquad f'(x) = \frac{(x^2-3)\cdot(9x^2)-(2x)\cdot(3x^3)}{(x^2-3)^2} = \frac{9x^4-27x^2-6x^4}{(x^2-3)^2} = \frac{3x^4-27x^2}{(x^2-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{3+x^2}{x^3} \qquad f'(x) = \frac{x^3\cdot 2x-3x^2\cdot(3+x^2)}{x^6} = \frac{x^2[2x-3(3+x^2)]}{x^6} = \frac{2x-9-3x^2}{x^4}$$