§04. Ableitungsfunktion

1. Definition

Eine Funktion f heißt *differenzierbar im Intervall [a;b]*, wenn sie an jeder Stelle $x_o \in]a;b[$ differenzierbar ist und die Differenzialquotienten bei a einen rechts- und bei b einen linksseitigen Grenzwert besitzen.
Die Menge aller x-Werte, für die f differenzierbar ist, heißt *Differenzierbarkeitsbereich* $D_{f'}$. Es gilt: $D_{f'} \subseteq D_f$
Die zu einer Funktion f in $D_{f'}$ definierte Funktion f: $x \mapsto f'(x)$ heißt *Ableitungsfunktion von f.*

2. Grenzwertberechnung mit der h-Methode

Um einen Grenzwert für $x \to x_o$ zu bestimmen, addiert oder subtrahiert man zu x_o eine positive Zahl h und lässt diese gegen Null gehen:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_o - h)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_o + h)$$

Beispiele:

① f: $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$; $x_o = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}\frac{(1-h)^2-1}{1-h-1} = \lim_{h\to 0}\frac{1-2h+h^2-1}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h+h^2}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(-2+h)}{-h} = \lim_{h\to 0}(2-h) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{1+h-1} = \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

Damit: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

② f: $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-2}$; $x_o = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(2-h) = \lim_{h\to 0}\frac{(2-h)^2-1}{2-h-2} = \lim_{h\to 0}\frac{4-4h+h^2-1}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-4h+h^2}{-h} = \lim_{h\to 0}(-\frac{3}{h}+4-h) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(2+h) = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-1}{2+h-2} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3+4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(\frac{3}{h}+4+h) = +\infty$$

Vertikale Asymptote: x = 2

Bestimmung der Ableitung $f'(x_o)$ mit der h-Methode:

$$\lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{x_o+h-x_o} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

$$\lim_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{x_o-h-x_o} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{-h}$$

3. Ableitungsfunktion von f: $x \mapsto x^n$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nhx^{n-1} + ah^2x^{n-2} + \ldots + h^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{nhx^{n-1} + ah^2x^{n-2} + \ldots + h^n}{h} = \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + ahx^{n-2} + \ldots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$$

Also: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ (Exponent davor, oben um eins erniedrigen)

Beispiele

$f(x) = x^2 \quad\Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = x \quad\Rightarrow f'(x) = 1$

$f(x) = 3 \quad\Rightarrow f'(x) = 0$ (Konstante wird zu Null)

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad\Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

4. Summe und Differenz zweier Funktionen

Problem: Es soll die Ableitung der Funktion f mit f(x) = g(x) + h(x) bestimmt werden.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-h(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)+h(x+h)-(g(x)-h(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)+h(x+h)-h(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h} = g'(x) + h'(x)$$

Merke:
Sind zwei Funktionen g und h in einem gemeinsamen Bereich differenzierbar, so gilt dies auch für ihre Summe bzw. Differenz und es gilt:
$f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

5. Multiplikation mit einer Konstanten

Problem: Es soll die Ableitung der Funktion f mit f(x) = c·g(x) bestimmt werden.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{cg(x+h)-cg(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(c\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = c\cdot g'(x)$$

Merke:
Multipliziert man eine differenzierbare Funktion g mit einer Konstanten c, so ist die Ableitung das Produkt der Konstanten mit der Anleitungsfunktion g'.
$f(x) = c\cdot g(x) \quad \Rightarrow f'(x) = c\cdot g'(x)$

Beispiele

$f(x) = 3x + 5x^2 - 7$ => $f'(x) = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2x - 7 \cdot 0 = 3 + 10x$

Merke
Multiplikative Konstanten bleiben beim Ableiten erhalten.
Additive Konstanten werden beim Ableiten zu 0

Beispiele:

$f(x) = 3x^2 + 5a^2 - 3ax^3$ => $f'(x) = 6x - 9ax^2$

$f(a) = 3x^2 + 5a^2 - 3ax^3$ => $f'(a) = 10a - 3x^3$