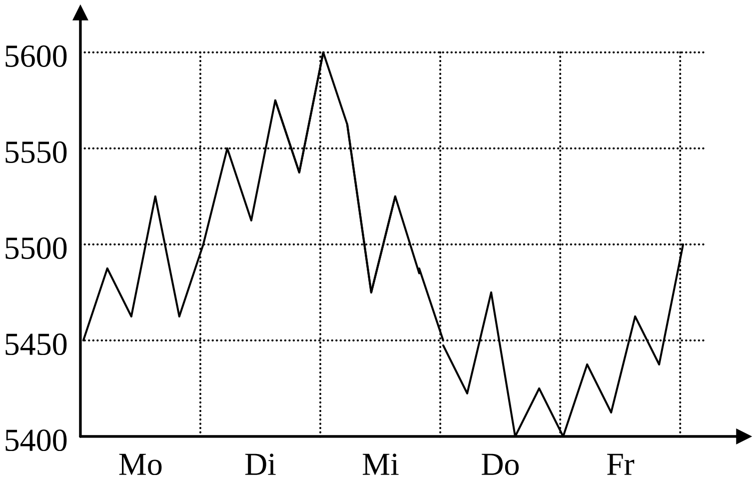
§03. Differenzierbarkeit

1. Mittlere Änderungsrate

Beispiel: *Kursverlauf des DAX'*

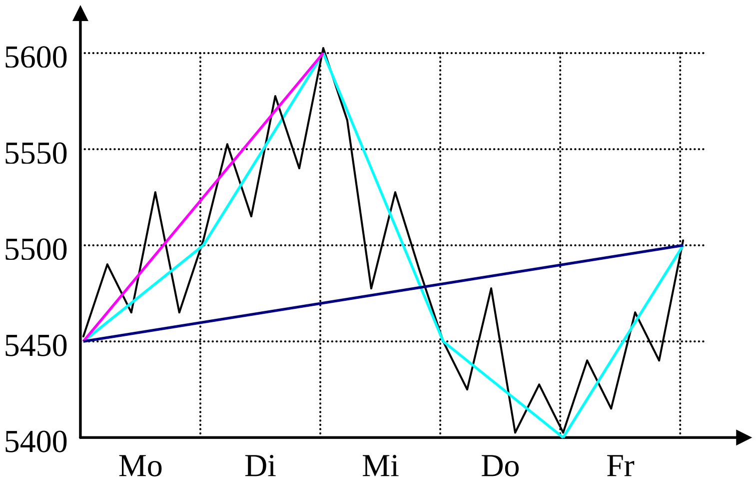


Montag: +50 Punkte/Tag
Dienstag: +100 Punkte/Tag
Mittwoch: –150 Punkte/Tag
Donnerstag: –50 Punkte/Tag
Freitag: +100 Punkte/Tag

gesamte Woche: +50 Punkte/Woche = 10 Punkte/Tag
Montag–Dienstag: +150 Punkte/(2Tage) = 75 Punkte/Tag

Die *mittlere Änderungsrate* oder der *Differenzenquotient* ist der Quotient aus der Differenz der y-Werte und der Differenz der zugehörigen x-Werte von zwei betrachteten Punkten.

Geometrische Bedeutung

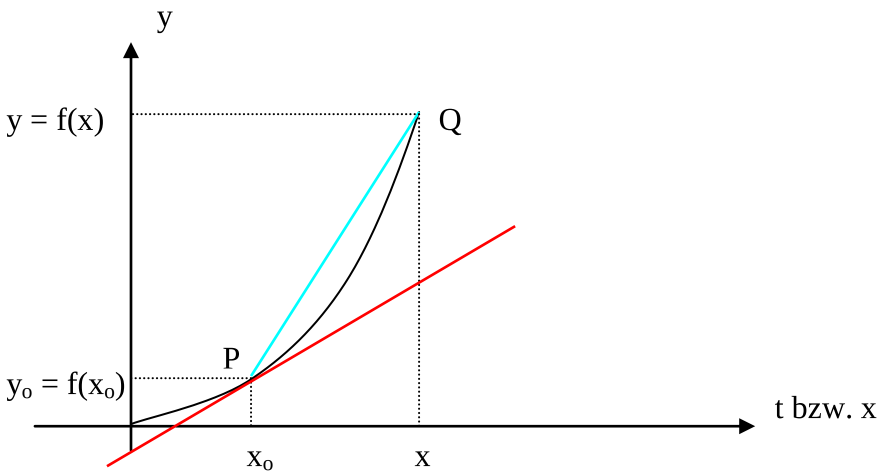


Der Differenzenquotient ist die Steigung m_s der Verbindungsstrecke der beiden Punkte.

2. Lokale Änderungsrate

Problem: Wie groß ist die (lokale) Änderungsrate zu einem bestimmten Zeitpunkt?

Beispiel: Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ beschreibt die Bewegung eines Autos, wobei x die Zeit t darstellt. Wie groß ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_o = x_o$



Die *mittlere Änderungsrate* ist hier die *mittlere Geschwindigkeit* der Bewegung von y_o nach y. Sie ist gleich der Steigung der Sekante. Die *lokale Änderungsrate* an der Stelle x_o ist die *Momentangeschwindigkeit* zum Zeitpunkt $t_o = x_o$. Geometrisch ist diese die Steigung der Tangente an der Stelle x_o.

Lösung: Der Punkt Q wandert auf dem Graphen zum Punkt P. Die zugehörige Sekantensteigung nähert sich immer mehr der gesuchten Tangentensteigung an.

Diese Tangentensteigung ist also gleich dem Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

3. Differenzierbarkeit

Definition

Eine Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle x_o*, wenn der Grenzwert

$f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Der Grenzwert des *Differenzenquotienten* heißt *Differentialquotient*.
(Links- und rechtsseitiger Grenzwert müssen denselben Wert besitzen!)

Sprechweise: $f'(x_o)$: „f Strich von x_o“ bzw. „1. Ableitung von f an der Stelle x_o“

Bedeutung:
Der Graph der Funktion besitzt an der Stelle x_o eine eindeutige Tangente.
Der Wert $f'(x_o)$ gibt die Steigung m dieser Tangente an, bzw. die lokale Änderungsrate der Funktion an der Stelle x_o.

Beispiele:
Untersuche, ob die Funktionen an der angegeben Stelle x_o differenzierbar sind und bestimme ggf. $f'(x_o)$.

a) $f(x) = x^2 \quad x_0 = 3$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}(x+3) = 6$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}(x+3) = 6$$

f ist differenzierbar an der Stelle $x_o = 3$; $f'(3) = 6$

b) $f(x) = |2x - 1| \quad x_0 = 0,5$

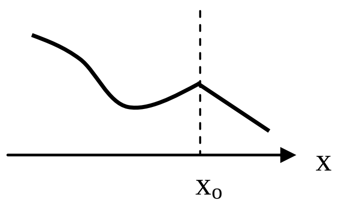
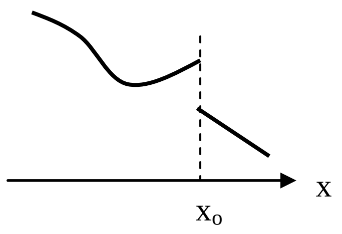
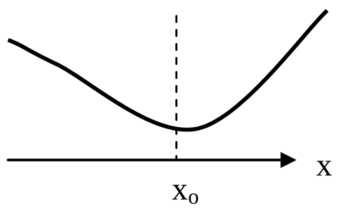
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{für } x \geq 0,5 \\ -2x+1 & \text{für } x < 0,5 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0,5^+} \frac{f(x)-f(0,5)}{x-0,5} = \lim_{x\to 0,5^+} \frac{2x-1-0}{x-0,5} = \lim_{x\to 0,5^+} \frac{2(x-0,5)}{x-0,5} = 2$$

$$\lim_{x\to 0,5^-} \frac{f(x)-f(0,5)}{x-0,5} = \lim_{x\to 0,5^-} \frac{-2x+1-0}{x-0,5} = \lim_{x\to 0,5^-} \frac{-2(x-0,5)}{x-0,5} = -2$$

f ist nicht differenzierbar an der Stelle $x_o = 0,5$

Graphische Darstellung

f nicht differenzierbar bei x = x_o		f differenzierbar bei x = x_o
 Knickstelle	 Sprungstelle	 kein Knick/Sprung