§02. Rationale Funktionen

1. Definitionen

Eine Funktion

$$f\colon x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_o} \quad \text{mit } a_n;\ b_n \neq 0 \text{ heißt } \textit{rationale Funktion}.$$

▶ Ist das Nennerpolynom konstant, so ist f eine *ganzrationale Funktion*, sonst eine *gebrochenrationale Funktion*.

▶ a_n bzw, b_m heißt *Leitkoeffizient* und n bzw. m der *Grad des Zähler-/bzw. Nennerpolynoms*.

▶ Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Nenners, dann
- enthält das Nennerpolynom den Faktor $(x - c)$,
- heißt die Stelle $x = c$ *Definitionslücke*
- heißt $(x - c)$ der zugehörige *kritische Faktor*.

<u>Beispiele:</u>

$f\colon x \mapsto 3x^2 + 4x + 2$: ganzrationale Funktion 2. Grades

$D = \mathbb{R}$

Leitkoeffizient: 3

$f\colon x \mapsto \dfrac{-3x^3 + 2x^2 + 1}{-x - 4}$: gebrochenrationale Funktion,

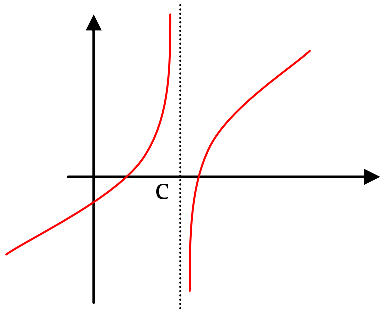
$D = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$

Zähler: Grad 3, Leitkoeffizient: –3
Nenner: Grad 1, Leitkoeffizient: –1

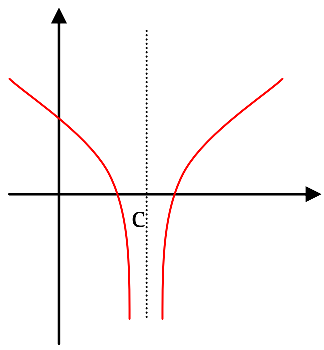
2. Eigenschaften von gebrochenrationalen Funktionen mit der Definitionslücke c

<u>Fall a) *Der kritische Faktor* $(x - c)^k$ *lässt sich nicht aus dem Nenner kürzen:*</u>

$x = c$ heißt *Polstelle k-ter Ordnung*. Der Graph besitzt eine vertikale („senkrechte“) Asymptote mit der Gleichung $x = c$



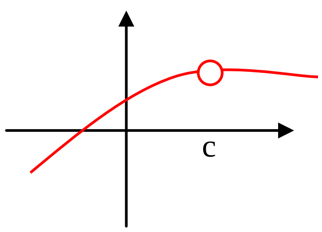
k ungerade: VZW



k gerade: kein VZW

<u>Fall b) *Der Faktor* $(x-c)^k$ *lässt sich vollständig aus dem Nenner kürzen:*</u>

$x = c$ ist zwar Definitionslücke aber keine Polstelle. „Loch“ im Graphen



3. Grenzwerte für $x \to x_0$

Problem: Es sollen die Definitionslücken bestimmt und das Verhalten einer Funktion in der Nähe dieser Lücken untersucht werden am Beispiel f: $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2-3x-4}$

Lösung: Faktorzerlegung: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x-4} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)}$

Definitionslücken: $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

▶ Setzt man für x in Zähler und Nenner den Wert $x_1 = -1$ ein, so werden beide Null („$\frac{0}{0}$“). Nach Kürzen des kritischen Faktors (x + 1) erhält man den Wert $a = \frac{2}{5}$.

> Man sagt in diesem Fall: „*f hat für $x \to x_0$ den Grenzwert a*“,
> Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ Sprich: „limes x gegen x_0 von f(x) ist gleich a“

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x-4} = \frac{2}{5}$$

▶ Setzt man für x in Zähler und Nenner Werte nahe $x_2 = 4$ ein, so wird der Nenner betragsmäßig beliebig klein und der Bruch betragsmäßig beliebig groß.
Beim Einsetzen von Werten x < 4 (linksseitige Annäherung), ist der Bruch negativ, bei Werten x > 4 (rechtsseitige Annäherung), ist der Bruch positiv.
Es existiert also kein Grenzwert, man schreibt in diesem Fall allgemein:

> $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty / +\infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty / +\infty$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x \to 4^-} \frac{x-1}{x-4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x \to 4^+} \frac{x-1}{x-4} = +\infty$$

(Man erhält sowohl für den gekürzten als auch den ungekürzten Term dasselbe Ergebnis)

Außerdem gilt:

- $x_2 = 4$ ist Polstelle 1. Ordnung
- vertikale Asymptote: x = 4

Bemerkung:

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ ist dann existent, wenn man sowohl bei Annäherung von rechts als auch von links an x_0 den Wert a erhält.

Schreibweisen: von links: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{\overset{<}{x \to x_0}} f(x) = a$

von rechts: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{\overset{>}{x \to x_0}} f(x) = a$

Die Rechenregeln aus der 10. Jahrgangsstufe gelten analog.

TIPP: Um Grenzwerte zu bestimmen, sollte der Funktionsterm faktorisiert werden.

Beispiele:
Untersuche jeweils das Verhalten von f in der Umgebung der angegebenen Stelle x_o.

① f: $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$; $x_o = 1$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to1^-}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to1^+}(x+1) = 2$$

Damit: $\lim_{x\to1} f(x) = 2$ Loch L(1|2)

② f: $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-2}$; $x_o = 2$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = \lim_{x\to2^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^2-1}{x-2} = \lim_{x\to2^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-2} = +\infty$$

Vertikale Asymptote: x = 2

Tipp: In die nicht-kritischen Faktoren (hier also in (x – 1) und (x + 1)) den exakten Zahlenwert (hier: 2) einsetzen, erst im kritischen Faktor (hier: (x – 2)) die Annäherungsseite berücksichtigen und etwas wenig kleineres bzw. größeres als 2 einsetzen (z.B. 1,9 bzw. 2,1), um das Vorzeichen zu ermitteln.

③ f: $x \mapsto \frac{x^2}{x+2}$; $x_o = 1$

(x_o = 1 keine Definitionslücke, d.h. getrennte Annäherung von links und rechts unnötig!)

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^2}{x+2} = \frac{1^2}{1+2} = \frac{1}{3}$$

4. Verhalten im Unendlichen

Definition
Eine Gerade mit dem Funktionsterm a(x) heißt *Asymptote* einer Funktion f, wenn die Differenz a(x) – f(x) für $x \to \infty$ gegen Null geht.

Untersuchung rationaler Funktionen

$$f: x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_o} = \frac{x^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}\right)}{x^m \cdot \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}\right)}$$

Fall a) n < m *Grad des Zählerpolynoms kleiner als der des Nennerpolynoms*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}\right)}{x^{m-n}\cdot\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}\right)} = 0\,;$$

horizontale Asymptote: y = 0

Beispiel: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; horizontale Asymptote: y = 0

Fall b) n = m *Grad des Zählerpolynoms gleich dem des Nennerpolynoms*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}} = \frac{a_n}{b_m}\,;$$

horizontale Asymptote $y = \frac{a_n}{b_m}$

Beispiel: $f(x) = \frac{2x+1-x^2}{2x^2-2}$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ horizontale Asymptote: $y = -\frac{1}{2}$

Fall c) n > m *Grad des Zählerpolynoms größer als der des Nennerpolynoms*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{n-m}\cdot\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}\right)}{\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^{n-m}\cdot\frac{a_n}{b_m}\right) = \pm\infty$$

Das Vorzeichen des Grenzwerts hängt also vom Exponenten n–m und vom Vorzeichen des Bruchs $\frac{a_n}{b_m}$ ab:

Ist der Exponent n–m eine gerade Zahl, so haben beide Grenzwerte (für x→+∞ und für x→–∞) dasselbe VZ wie der Bruch $\frac{a_n}{b_m}$.

Ist der Exponent n–m eine ungerade Zahl, so hat der Grenzwert für x→–∞ das gegenteilige Vorzeichen wie der Bruch $\frac{a_n}{b_m}$ und der Grenzwert für x→+∞ dasselbe Vorzeichen wie der Bruch $\frac{a_n}{b_m}$.

Beispiele:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+2x}{5-4x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^{3-1}\cdot\frac{3}{-4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = -\infty$$ Exponent n–m = 2 (gerade)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x^7}{5x-4x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^{7-2}\cdot\frac{2}{-4}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\infty$$ Exponent n–m = 5 (ungerade)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x^7}{5x-4x^2} = \lim_{x\to-\infty}\left(x^{7-2}\cdot\frac{2}{-4}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = +\infty$$ Exponent n–m = 5 (ungerade)

Zur Berechnung der Asymptote: Polynomdivision ausführen

Beispiele:

- $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 + 2x^2}{x^2+1}$

  $f(x) = (x^4 - x^3 + 2x^2):(x^2 + 1) = x^2 - x + 1 + \dfrac{x-1}{x^2+1}$

  $$\begin{array}{l} \underline{-(x^4 \quad\quad + x^2)} \\ -x^3 + x^2 \\ \quad \underline{-(-x^3 \quad\quad\quad - x)} \\ \quad\quad x^2 + x \\ \quad\quad \underline{-(x^2 \quad\quad +1)} \\ \quad\quad\quad x - 1 \end{array}$$

  Der Bruch („Divisionsrest“) geht gegen Null, der ganzrationale Anteil beschreibt die asymptotische Kurve:
  $y = x^2 - x + 1$ ist Gleichung der asymptotischen Kurve

- $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2}{x^2+1}$

  $f(x) = (x^3 - x^2 \quad + 2):(x^2 + 1) = x - 1 + \dfrac{-x+3}{x^2+1}$

  $$\begin{array}{l} \underline{-(x^3 \quad\quad + x)} \\ \quad -x^2 - x + 2 \\ \quad \underline{-(-x^2 \quad\quad - 1)} \\ -x + 3 \end{array}$$

  schräge Asymptote: $y = x - 1$

Hinweis: Um das Grenzverhalten zu ermitteln, kann man einfach den Term der Asymptote betrachten. Dieser zeigt dasselbe Verhalten wie der Funktionsterm:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$$

Hinweis: Polynomdivision zum Auffinden der Asymptote kommt so gut wie nicht mehr vor.
Meist sind die Funktionsterme bereits in einer Form wie $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x^2+1}$ vorgegeben, so dass man die Asymptotengleichung sofort ablesen kann. Umgekehrt empfiehlt es sich, den Term als einen einzigen Bruch zu schreiben (Erweitern auf Hauptnenner)

$$f(x) = x - 1 + \frac{-x+3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{-x+3}{x^2+1} = \frac{x^3 + x - x^2 - 1 - x + 3}{x^2+1} = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2+1}$$